Lehr- und Handbuch
der
Flächen- und Körperrechnung
zum Schul- und Selbstunterricht.

Mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste

bearbeitet

von

Wilhelm Adam,
Königl. Seminarlehrer.

Vierte revidirte Auflage.

Mit mehr als 600 Uebungsaufgaben, nebst 13 Figuren im Text.

Langensalza.
Verlags-Comptoir von Hermann Beyer
1875.

Vorwort zur dritten Auflage.

Vorliegende dritte Bearbeitung, welche auf Grund des neuen Münz-, Maß- und Gewichtssystems ausgeführt worden ist, enthält

1. eine Tabelle der neuen Münzen, Maße und Gewichte des deutschen Reiches, und zwar mit Angabe ihrer wechselseitigen Beziehungen, sowie des Verhältnisses, in welchem die neuen und alten (preußischen) Rechnungseinheiten unter sich stehen;

2. eine kurzgefaßte, leichtverständliche Erklärung der in jedem einzelnen Falle zu berechnenden Raumgröße;

3. allgemeine Regeln für das zu beobachtende Rechnungsverfahren, wie auch (z. B. in § 11 und § 24) Tabellen, mit deren Hülfe schwierigere Berechnungen ohne große Mühe vollzogen werden können;

4. Beispiele, welche den Gang der vorzunehmenden Rechnung in kürzester Form veranschaulichen;

5. zahlreiche Uebungsaufgaben, welche dem fleißigen Leser ausreichende Gelegenheit bieten, die erlangte Einsicht in selbstständiger Weise praktisch zu verwerthen.

Eine aufmerksame Vergleichung gegenwärtiger Bearbeitung, resp. Umarbeitung mit den beiden vorhergegangenen Auflagen wird darthun, daß der Verfasser nach möglichster Vereinfachung des dargebotenen Stoffes gestrebt und überhaupt keine Mühe gescheut hat seinem so überaus wohlwollend aufgenommenen Büchlein diejenigen Eigenschaften zu verleihen, deren es bedarf, um als Leitfaden und Uebungsbuch für die Schule und als zeitgemäßer praktischer Rathgeber für Gewerbtreibende und Landwirthe mit dem erforderlichen Nutzen dienen zu können.

Die auf vielseitigen Wunsch diesmal neu hinzugekommenen 610 Uebungsaufgaben treten, um das Büchlein nicht zu umfangreich werden zu lassen, in kürzester Form auf; und wollen daher die

Herren Lehrer die Güte haben, diese Aufgaben, wo es besonders wünschenswerth erscheint, mit einer den praktischen Rechenfällen entsprechenden Worteinkleidung zu versehen.

Winke für fernere zeitgemäße Verbesserung dieses Büchleins werden stets von dem Verfasser dankbar aufgenommen und nach Kräften benutzt werden.

Möge das „Lehr- und Handbuch der Flächen- und Körperrechnung" auch auf seinem dritten Rundgange die wohlwollende Aufnahme finden, die ihm bisher in Schule und Haus zu Theil geworden ist.

Kyritz, den 5. December 1872.

W. Adam.

Vorwort zur vierten Auflage.

Die vierte Auflage dieses Büchleins ist eine sorgfältig revidirte. Außer einigen Berichtigungen, die nur Einzelheiten betreffen, hat der Verfasser weitere Veränderungen vorzunehmen keine Veranlassung gehabt; und kann daher in öffentlichen Unterrichtsanstalten die dritte Auflage neben der gegenwärtigen ohne Störung gebraucht werden.

So möge sich denn das vorliegende Büchlein zu seinen zahlreichen alten Freunden weitergehend immer neue erwerben, die, vereint mit dem Verfasser, bestrebt sind, zeitgemäßen Anforderungen des praktischen Lebens lehrend oder lernend Genüge zu leisten.

Neu-Ruppin, den 27 Juli 1874.

W. Adam.

A. Tabelle

der Maße, Gewichte und Münzen des deutschen Reiches.

I. Längenmaß.

1 m. = 10 dm.	10 m. = 1 Dm.	10 Km. = 1 Mm.
1 dm. = 10 cm.	10 Dm. = 1 Hm.	
1 cm. = 10 mm.	10 Hm. = 1 Km.	

Daher ist

Km	Hm.	Dm.	m.	dm.	cm.	mm.
1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1 Million
	1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000
		1 =	10 =	100 =	1000 =	10000
			1 =	10 =	100 =	1000
				1 =	10 =	100
					1 =	10

1 metrische Meile = 7500 m. = 750 Dm. = 75 Hm. = $7\frac{1}{2}$ Km. = $\frac{3}{4}$ Mm.

Anmerk. Es ist

m. = Meter		
dm. = Decimeter	Dm. = Dekameter	
cm. = Centimeter	Hm. = Hektometer	
mm. = Millimeter	Km. = Kilometer	Mm. = Myriameter.

Das Meter ist der zehnmillionste Theil vom Quadranten des über die Sternwarte von Paris gehenden Erdmeridians.

II. Flächenmaß.

1 □m. = 100 □dm.	100 □m. = 1 □Dm. od. 1 a
1 □dm. = 100 □cm.	100 □Dm. = 1 □Hm. od. 1 Ha
1 □cm. = 100 □mm.	100 □Hm. = 1 □Km. od. 1 Ma

Daher ist

Ma. oder □Km.	Ha. oder □Hm.	a. oder □Dm.	□m.	□dm.
1 =	100 =	10000 =	1 Million =	100 Million
	1 =	100 =	10000 =	1 Million
		1 =	100 =	10000
			1 =	100

□dm.	□cm.	□mm.
100 Million =	10 Milliarden =	1 Billion
1 Million =	100 Million =	10 Milliarden
10000 =	1 Million =	100 Million
100 =	10000 =	1 Million
1 =	100 =	10000
	1	100

1 metrische □Meile = 5625 Ha. = $^9/_{16}$ Million Ar = $56^1/_4$ Million □m.

Anmerk. Es ist

□m. = Quadratmeter od. Flächenmeter.
□dm. = Quadratmeter od. Flächendecimeter.
□cm. = Quadratcentimeter oder Flächencentimeter.
□mm. = Quadratmillimeter oder Flächenmillimeter.
□Dm. = Quadratdekameter od. Flächendekameter.
□Hm. = Quadrathektometer od. Flächenhektometer
□Km. = Quadratkilometer od. Flächenkilometer.
□Mm. = Quadratmyriameter od. Flächenmyriamtr.

Als Ackermaß heißt
das Quadratdekameter ein Ar (bezeichnet mit a.)
das Quadrathektometer ein Hektar (bezeichnet Ha)

Es sind 100 a. = 1 Ha.
100 Ha. = 10 Ka. (Kilar), welche 1□ Km. bilden.

Der Name Kilar findet nur in Frankreich Anwendung.

III. Kubikmaß.

1 ⧉m. = 1000 ⧉dm.
1 ⧉dm. = 1000 ⧉cm.
1 ⧉cm. = 1000 ⧉mm.

1000 ⧉m. = 1 ⧉Dm.
1000 ⧉Dm. = 1 ⧉Hm.
1000 ⧉Hm. = 1 ⧉Km.
(1000 ⧉Km. = 1 ⧉Mm.)

Daher ist

⧉Km.	⧉Hm.	⧉Dm.	⧉m.	⧉dm.	⧉cm.	⧉mm.
1	= 1000	= 1 Mill.	= 1 Mllde	= 1 Bill.	= 1000 Bill.	= 1 Trill.
	1	= 1000	= 1 Mill.	= 1 Mllde	= 1 Bill.	= 1000 B.
		1	= 1000	= 1 Mill.	= 1 Mllde	= 1 Bill.
			1	= 1000	= 1 Mill.	= 1 Mllde
				1	= 1000	= 1 Mill.
					1	= 1000

1 metr. Kubikmeile = $421\frac{7}{8}$ Milliard. ⧉m. = $\frac{27}{64}$ ⧉Mm.

Anmerk. Es ist

⧉m. = Kubikmeter oder Raummeter.
⧉dm. = Kubikdecimeter oder Raumdecimeter.
⧉cm. = Kubikcentimeter oder Raumcentimeter.
⧉mm. = Kubikmillimeter oder Raummillimeter.
⧉Dm. = Kubikdekameter oder Raumdekameter.
⧉Hm. = Kubikhektometer oder Raumhektometer.
⧉Km. = Kubikkilometer oder Raumkilometer.
⧉Mm. = Kubikmyriameter oder Raummyriameter.

IV. Hohlmaß.

1 l. = 10 dl.
1 dl. = 10 cl.
1 cl. = 10 ml.
100 l. = 1 Hl.

	Hl.		l.		dl.		cl.		ml.
Daher ist	1	=	100	=	1000	=	10000	=	100000
			1	=	10	=	100	=	1000
					1	=	10	=	100
							1	=	10

Anmerk. Es ist l. = Liter
dl. = Deciliter
cl. = Centiliter
ml. = Milliliter
Hl. = Hektoliter

Auch wird das Hektoliter in 2 (neue) Scheffel, und das Liter in 2 Schoppen eingetheilt.

V. Gewicht.

1 Kg. = 100 Dg. od. 100 Loth
1 Dg. = 10 g.
1 g. = 10 dg.
1 dg. = 10 cg.
1 cg. = 10 mg.
1 Kg. = 2 Pfund (Zl.)
50 Kg. = 1 Ctr.
20 Ctr. = 1 T.

Daher ist

1 T. = 20 Ctr. = 1000 Kg. = 2000 ℔. = 100000 Dg. (Loth) = 1 Million g. = 10 Million dg. = 100 Million cg. = 1 Milliarde mg.

1 Ctr. = 50 Kg. = 100 ℔. = 5000 Dg. (Lth) = 50000 g. = 500000 dg. = 5 Million cg. = 50 Million mg.

1 ℔. = 50 Dg. (Loth) = 500 g. = 5000 dg. = 50000 cg. = $^1/_2$ Million mg. und ferner

Kg.		Loth oder Dg.		g.		dg.		cg.		mg.
1	=	100	=	1000	=	10000	=	100000	=	1 Million
		1	=	10	=	100	=	1000	=	10000
				1	=	10	=	100	=	1000
						1	=	10	=	100
								1	=	10

Anmerk. Es ist

Kg. = Kilogramm	mg. = Milligramm
Dg. = Dekagramm	℔. = Pfund
g. = Gramm	Ctr. = Centner
dg. = Decigramm	T. = Tonne
cg. = Centigramm	

VI. Beziehungen der Kubik- und Hohlmaße unter sich.

Das Kubikdecimeter heißt als Hohlmaß ein Liter. Hiernach ist

1 Hl.	=	100 ⧆dm.	=	$^1/_{10}$ ⧆m.
1 l.	=	1 „		
1 dl.	=	$^1/_{10}$ „		
1 cl.	=	$^1/_{100}$ „	=	10 ⧆cm.
1 ml.	=	$^1/_{1000}$ „	=	1 „

VII. Beziehungen der Gewichte und Körpermaße unter sich.

Ein Kubikdecimeter oder 1 Liter destillirtes Wasser wiegt bei einer Wärme von 4 Grad des hunderttheiligen Thermometers (Celsius) 1 Kilogramm oder 2 Pfund. Hiernach wiegt

1 ⧆m. Wasser 1000 Kg. od. 1 T.	1 ⧆Dm. Wass. 1000 T.
1 ⧆dm. „ 1 „	1 ⧆Hm. „ 1 Mill. T.
1 ⧆cm. „ $^1/_{1000}$ „ od. 1 g.	1 ⧆Km. „ 1 Mllde T.
1 ⧆mm. „ $^1/_{1000}$ g. od. 1 mg.	

VIII. Münzen.

Aus einem Kilogramm feinen Goldes prägt man jetzt 279 Goldstücke, jedes derselben zum Werthe von 10 Mark. Ein Kilogramm Gold ergiebt also 279 Zehn-Mark-Stücke oder $139^1/_2$ Zwanzig-Mark-Stücke, d. i. $139^1/_2$ Goldstücke à 20 Mark. Die Mark selbst ist eine Silbermünze, welche in 100 (neue) Pfennige eingetheilt wird.

Hiernach ist	1 Mark	=	100 Pfg.
	1 Zehn-Mark-Stück	=	1000 Pfg.
	1 Zwanzig-Mark-Stück	=	2000 Pfg.

B. Vergleichung

der neuen und alten Maße, Gewichte und Münzen.

(Zur Benutzung in der Uebergangsperiode).

Vorbemerkung. In nachstehender Vergleichung sind unter den alten Längen-, Flächen- nnd Körpermaßen die bisher im Preußischen Staate üblichen zu verstehen. Die betreffenden Verwandlungen sind annähernde.

I. Längenmaß.

1 m. = 3,1862 Fuß.
1 Fuß = 0,31385 Meter.

1 n. Mle = $^{230}/_{231}$ alt. Mln.	1 alte Mle = $^{231}/_{230}$ n. Mln.
1 m. = $^4/_{15}$ Ruthen.	1 Ruthe = $^{15}/_4$ m.
1 m. = $^3/_2$ Ellen.	1 Elle = $^2/_3$ m.
1 m. = $^{16}/_5$ Fuß.	1 Fuß = $^5/_{16}$ m.
1 cm. = $^3/_8$ Zoll.	1 Zoll = $^8/_3$ cm.

15 Km. = 2 neuen Meilen (genau.)

II. Flächenmaß.

1 n. □Mle = $^{115}/_{116}$ alt. □Mln.	1 alt. □Mle = $^{116}/_{115}$ n. □Mln.
1 Ha. = $3^{11}/_{12}$ Morgen.	1 Morgen = $^1/_4$ Ha.

1 a. — $^1/_{25}$ Morgen.	1 Morgen $25^1/_2$ a.
1 □m. = $^1/_{14}$ □Ruthe	1 □Ruthe $14^1/_5$ □m.
1 □m. = $10^1/_7$ □Fuß.	1 □Fuß $^1/_{10}$ □m.
1 □cm. = $^1/_7$ □Zoll.	1 □Zoll $6^5/_6$ □cm.

900 □Km. = 16 neuen □Meilen (genau).

III. Kubikmaß.

1 n. ⧉Mle = $^{76}/_{77}$ a. ⧉Mln.	1 a. ⧉Mle = $^{77}/_{76}$ n. ⧉Mln.
1 ⧉m. = $^1/_{53}$ ⧉Ruthen.	1 ⧉Ruthe = $53^2/_5$ ⧉m.
1 ⧉m. = $^{11}/_{49}$ Schachtruthe.	1 Schachtruthe = $^{49}/_{11}$ ⧉m.
1 ⧉m. = $^3/_{10}$ Klafter Holz.	1 Klafter Holz = $^{10}/_3$ ⧉m.
1 ⧉m. = $^7/_{30}$ Kummet Torf.	1 Kummet Torf = $^{30}/_7$ ⧉m.
1 ⧉m. = $32^1/_3$ ⧉Fuß.	1 ⧉Fuß = $^1/_{32}$ ⧉m.
1 ⧉m. = $^1/_{18}$ ⧉Zoll.	1 ⧉Zoll = 18 (od. $17^8/_9$) ⧉cm.

27000 ⧉ Km. = 64 neuen Kubikmeilen (genau).

IV. Hohlmaß.

1 Hl. = $^1/_{13}$ Wispel.	1 Wispel = $13^1/_5$ Hl.
1 neuer Schfl. = $^{10}/_{11}$ alte Schfl.	1 alt. Schfl. = $^{11}/_{10}$ neue Schfl.
1 " " = $^1/_{26}$ Wispel.	1 Wispel = $26^2/_5$ neue Schfl.
1 Liter = $^1/_{55}$ alte Schfl.	1 alt. Schfl. = 55 Liter.
1 " = $^7/_{24}$ Metzen.	1 Metze = $^{24}/_7$ Liter.
1 Hl. = $^7/_9$ Tonnen Leinsaat.	1 Tonne Leins. = $^9/_7$ Hl.

(Wein.)

1 Hl. = $^4/_{33}$ Fuder.	1 Fuder = $^{33}/_4$ Hl.
1 Hl. = $^{16}/_{33}$ Oxhoft.	1 Oxhoft = $^{33}/_{16}$ Hl.
1 Hl. = $^8/_{11}$ Ohm.	1 Ohm = $^{11}/_8$ Hl.
1 l. = $^1/_{68}$ Eimer.	1 Eimer = $68^4/_7$ l.
1 l. = $^1/_{34}$ Anker.	1 Anker = $34^2/_7$ l.

(Bier.)

1 l. = $^7/_8$ Quart.	1 Quart = $^8/_7$ l.
1 Schopp. = $^7/_{16}$ Quart.	1 Quart = $^{16}/_7$ Schopp.
1 Hl. = $^7/_8$ Tonn. Bier.	1 Tonne Bier = $^8/_7$ Hl.

V. Gewicht.

1 Kg. = 2 ℔.	1 ℔. = 1/2 Kg.
1 Dg. = 3/5 a. Loth.	1 Lth. = 5/3 Dg. (neue Loth.)
1 g. = 3/5 Quentchen.	1 Quentchen = 5/3 Gramm.

VI. Münze.

1 Zwanzig-Mark-Stück = 6 2/3 Thlr.
1 " = 11 2/3 Gulden südd.
1 " = 10 Gulden östr.
1 Zehn-Mark-Stück = 3 1/3 Thlr.
1 " = 5 5/6 Gld. südd.
1 " = 5 Gld. östr.
1 Mark = 1/3 Thlr.
1 " = 35 Krz. südd.
1 " = 50 Nkrz. östr.
1 neuer Pfg. = 6/5 prß. Pf.
1 " " = 7/5 südd. Pfg.
1 " " = 1/2 Nkrz. östr.
1 Thaler = 3 Mark.
1 Gld. südd. = 1 5/7 Mark.
1 Gld. östr. = 2 Mark.
1 Sgr. oder Ngr. = 1/10 Mark.
1 " " " = 10 neue Pfg.
1 Krz. südd. = 2 6/7 neue Pfg.
1 " " = 1/35 Mark.
1 Nkrz. östr. = 2 neue Pf.
1 " " = 1/50 Mark.
1 prß. Pfg. = 5/6 neue Pfg.
1 südd. Pfg. = 5/7 neue Pf.
1 sächs. Pfg. = 1 neuer Pfg.

Anmerkung Bisher prägte man aus einem Pfunde feinen Silbers 30 Thlr. = 52 1/2 Gld. südd. = 45 Gulden östr. Demgemäß ergiebt 1 Kilogramm Silber 60 Thlr. = 105 Gld. südd. = 90 Gld. östr. Da 60 Thlr. = 60 × 3 = 180 Mark = 18 Zehn-Mark-Stücken sind und da hinsichtlich des gegenwärtig geltenden Werthes sich das Silber zum Gold verhält wie 1 zu 15 1/2, so ergiebt 1 Kilogramm Gold 15 1/2 × 18 = 31 × 9 = 279 Zehn-Mark-Stücke = 139 1/2 Zwanzig-Mark-Stücke. (S. A. VIII.)

Flächenrechnung.

§. 1.

Das Quadrat.

1. Erläuterung. Das Quadrat hat vier gleiche Seiten und vier gleiche (nämlich rechte) Winkel. Je zwei gegenüberstehende Seiten sind gleichlaufend (parallel), und gehört daher das Quadrat zu den Parallelogrammen. Das gleichseitige rechtwinklige Parallelogramm heißt Quadrat. Es giebt vier Arten von Parallogrammen; diese sind: das Quadrat, das Rechteck, der Rhombus (oder die Raute) und das Rhomboid.

2. Berechnung des Flächeninhalts eines Quadrats. Zunächst muß die Seite des Quadrats gemessen werden. Findet sich hierbei statt eines einfachen Maßes ein zusammengesetztes (z. B. Meter und Centimeter), so verwandle man letzteres in ein einfaches (z. B. in Centimeter oder in Meter) und multiplicire die gefundene Maßzahl mit sich selbst. Das erhaltene Produkt ergiebt den Flächeninhalt des Quadrats, und zwar in Quadratmeter (bez. □cm.), wenn die Länge der Seite in Meter (bez. Centimeter) ausgedrückt ist.

3. Beispiel. Wie groß ist ein quadratförmiger Garten, wenn jede Seite desselben 26 m. 75 cm. (oder 26,75 m. = $26^3/_4$ m.) Länge hat?

Erste Berechnung.

Es sind 26 m. = 26 × 100 = 2600 cm.
hierzu 75 „
giebt 2675 cm.

Ist aber die Seite des Quadrats 2675 cm. lang, so beträgt der Flächeninhalt desselben 2675 × 2675 = 7155625 □cm. oder, da 100 □cm. = 1 □dm. und 100 □dm. = 1 □ m.

sind, = 71556,25 □dm., (d. i. $71556^{25}/_{100}$ □dm. oder 71556 □dm. 25cm.) = 715,5625 □m. (d. i. $715^{5625}/_{10000}$ □m. oder 715 □m. 56 □dm. 25□cm.) Folglich ist die Größe obigen Gartens = 715 □m. 56 □dm. 25 □cm. = 715,5625 □m.

Zweite Berechnung.

Die Seite des Quadrats beträgt 26,75 m. (d. i. $26^{75}/_{100}$ m.), mithin der Flächeninhalt desselben 26,75 × 26,75 = $\frac{2675 \times 2675}{100 \times 100} = \frac{7155625}{10000} = 715^{5625}/_{10000}$ □m. = 715,5625 □m.

Dritte Berechnung.

Die Seite des Quadrats beträgt $26^3/_4$ m. = $^{107}/_4$ m., daher der Flächeninhalt desselben $\frac{107 \times 107}{4 \times 4} = \frac{11449}{16} =$ $715^9/_{16}$ □m. = 615, 95625 □m.

4. Uebungsaufgaben. In einem Quadrat ist

1. die Seite = 23 m., der Inhalt = ? (529 □m.)
2. die Seite = 35 m., der Inhalt = ? (1225 □m.)
3. die Seite = 47 m., der Inhalt = ? (2209 □m. = 22 a. 9 □m.)
4. die Seite = $4^1/_2$ m., der Inhalt = ? ($20^1/_4$ □m.)
5. die Seite = $5^3/_4$ m., der Inhalt = ? ($33^1/_{16}$ □m.)
6. die Seite = 6,25 m., der Inhalt = ? (39,0625 □m.)
7. die Seite = 17,5 m., der Inhalt = ? (306,25 □m. = 3 a. 6 □m. 25 □dm.)
8. die Seite = 48,9 m., der Inhalt = ? (2391,21 □m. = 23 a. 91 □m. 21 □dm.
9. die Seite = 9 m. 8 dm. 7 cm., der Inhalt = ? (97 □m. 41 dm. 69 cm. = 96,4169 □m.)
10. die Seite = 8 m. 7 dm. 2cm., der Inhalt = ? (76 □m. 2 □dm. 84 □cm. = 76,0384 □m.)

5. Berechnung der Seite eines Quadrats aus dem Flächeninhalte desselben. Die Lösung dieser Aufgabe besteht darin, daß man eine Zahl finde, welche mit sich selbst

multiplicirt, die Maßzahl des Flächeninhalts ergiebt. Die gesuchte Zahl heißt alsdann Quadratwurzel, während die gegebene Maßzahl des (in einem einfachen Maße ausgedrückten) Flächeninhalts eine Quadratzahl genannt wird. Es muß also die Quadratwurzel gefunden, oder, wie man sagt, ausgezogen (extrahirt) werden.

§. 2.

Vom Ausziehen der Quadratwurzel.

1. Beispiel. Wie lang ist die Seite eines quadratförmigen Ackerstücks, welches 5 a. 61 □m. 69 □dm. enthält?

Der Flächeninhalt des Ackerstücks beträgt 56169 □dm. Die Quadratwurzel dieser Zahl findet man folgendermaßen.

```
          √5|61|69 = 2 Hunderte           } zusammen
           4|  |                          }    23
2 × 2 = 4 in 1 6(1)  = 3 (nicht 4) Zehner }  Zehner
    4 × 3 = 12
            41
    3 × 3 =  9
2 × 23 = 46 in 32 6     = 7 Eimer
    7 × 46 = 32 2       ---------
               49        zusammen
    7 × 7  =   49     237 dm. = 23,7 m.
```

Demnach ist jede Seite des Ackerstücks 23 m. 7 dm. = 23,7 m. lang.

Anmerk. Geübtere bedienen sich zum Wurzelausziehen folgender kürzeren Form.

```
                       √5|61|68 = 237
               2 × 2 =   4|  |
2 × 2(00) + 3(0) = 43 in 1 61
            43 × 3 = 1 29
  2 × 23(0) + 7 = 467 in 32 69
           467 × 7 = 32 69
```

2. Erklärung des obigen Verfahrens.

Das Zeichen des Wurzelausziehens, nämlich $\sqrt{}$, ist ein verschobenes lateinisches r und erinnert an das lateinische Wort radix, welches im Deutschen Wurzel heißt. Demgemäß heißt $\sqrt{56169}$ nichts weiter als: Quadratwurzel aus 56169. Um diese Wurzel zu finden, theile die Zahl 56169 von der Rechten an durch senkrechte Striche in Klassen von 2 Stellen. Die erste Klasse zur Linken enthält die Ziffer 5. Die nächste Quadratwurzel von 5 ist 2. Wird nun die Quadratzahl von 2, d. i. $2 \times 2 = 4$, von 5 abgezogen, so findet sich 1 als Rest, während sich bereits die Zahl 2 als erster Quotient ergeben hat. Hierauf nimmt man zum Rest 1, die Zahl 61 aus der zweiten Klasse herunter, wodurch die Zahl 161 entsteht, und dividirt mit dem verdoppelten ersten Quotienten, nämlich, mit $2 \times 2 = 4$, versuchsweise in die beiden ersten Stellen (d. i. 16) derselben. Obgleich nun 4 in 16 gerade 4 Mal enthalten ist, so muß doch, und zwar wegen der nachträglich noch abzuziehenden Quadratzahl (im obigen Falle $3 \times 3 = 9$), die Zahl 3 als zweiter Quotient betrachtet werden, so daß die bereits gefundenen Wurzelziffern die Zahl 23 ergeben, von welcher 2 als erster und 3 als zweiter Theil bekannt, der dritte Theil aber für jetzt noch unbekannt ist. Der verdoppelte erste Theil, durch den zweiten Theil multiplicirt, giebt $(2 \times 2) \times 3$ oder $4 \times 3 = 12$. Wird diese Zahl vom ersten Reste, d. i. von 16, abgezogen, so erhält man $16 - 12 = 4$, und durch Hinzufügung einer neuen Stelle rechts (1 aus der zweiten Klasse), hieraus die Zahl 41, von welcher das Quadrat des zweiten Theils (nämlich $3 \times 3 = 9$) abgezogen werden muß. Es ist aber $41 - 9 = 32$, woraus, wenn die Ziffer 6 aus der dritten Klasse als neue Stelle rechts hinzugefügt wird, die Zahl 326 entsteht. Da noch eine Wurzelziffer zu finden ist, so betrachtet man nun die beiden bereits bekannten Wurzelziffern (d i. 23) als ersten Theil der gesuchten Wurzelzahl. Durch Verdoppelung desselben findet sich $2 \times 23 = 46$, welche Zahl in der vorhin erwähnten Zahl 326 bekanntlich 7 Mal enthalten ist, wodurch zugleich der Rest 4 gefunden wird. Diesen Rest, um eine Stelle rechts (nämlich 9 aus der dritten Klasse) vermehrt, ergiebt die Zahl 49. Sub-

trahirt man hiervon die Quadratzahl des dritten Theils, nämlich 7 $\times$ 7 = 49, so ist der Rest = 0, und daher die gesuchte Quadratzahl = 237.

Anmerk. 1. Aus obiger Erläuterung ergiebt sich, daß man, um die Quadratwurzel zu finden, hauptsächlich nur zweierlei zu thun hat, nämlich: 1) Quadratzahlen abzuziehen und 2) mit dem Doppelten des schon Gefundenen zu dividiren.

Anmerk. 2. Wird der erste Theil der Wurzel mit a. der zweite mit b. bezeichnet, so ist die Quadratzahl hiervon =

$$a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

Diese Formel deutet zugleich den Weg an, der beim Ausziehen der Quadratwurzel eingeschlagen werden muß.

3. Uebungsaufgaben.

	Gegeben: Flächeninhalt des Quadrats.	Gesucht: Seite.
11.	24 a. 1 □m.	49 m.
12.	54 a. 76 □m.	74 m.
13.	90 a. 25 □m.	95 m.
14.	16 Ha. 32 a. 16 □m.	404 m.
15.	43 Ha. 95 a. 69 □m.	663 m.
16.	78 Ha. 85 a. 44 □m.	888 m.
17.	152 □m. 27 □dm. 56 □cm.	12 m. 34 cm.
18.	32 Ha. 55a. 84 □m. 36dm.	570 m. 6 dm.
19.	14 Ha. 78a. 94 □m. 8 □dm. 49 □cm.	384 m. 57 cm.
20.	46 Ha. 78 a. 84 □m. 72 □dm. 84 □cm. 41 □mm.	684 m. 21 mm.

§ 3.

Das Rechteck.

1. Das Rechteck (z. B. die Wand eines Zimmers, die Fläche einer Schiefertafel) oder das ungleichseitig-rechtwinklige Parallelogramm hat 4 ungleiche Seiten und 4 rechte Winkel. Die gegenüberstehenden Seiten des Rechtecks sind parallel und gleich. Grundlinie des Rechtecks kann jede Seite desselben sein; die mit ihr (unter einem rechten Winkel) zusammenstoßende Seite ist alsdann die Höhe des Rechtecks. Grundlinie und

Höhe werden im praktischen Leben oft Länge und Breite genannt.

2. Um den Flächeninhalt eines Rechtecks zu finden, multiplicire man die Maßzahlen der Länge und Breite (beide in einfachem Maße ausgedrückt) mit einander. Die gefundene Zahl bezeichnet alsdann □m., □dm., □cm. u. s. w., je nachdem die beiden Ausdehnungen des Rechtecks in Meter, oder Decimeter, Centimeter u. s. w. gegeben sind.

Beispiel. Ein Bauplatz von der Form eines Rechtecks ist 27 m. 54 cm. lang und 24 m. 45 cm. breit; wie viel beträgt sein Flächeninhalt?

Erste Berechnung.

24 m. 45 cm. = 2445 cm.
27 m. 54 cm. = 2754 cm.

Hiernach ist der Flächeninhalt = 2445 × 2754 □cm. oder

```
      2754
      2445
    ------
     13770
    11016
   11016
   5508
  --------
   6733530 □ cm. =
```

6 a. 73 □m. 35 □dm. 30 □cm.

Zweite Berechnung.

24 m. 45 cm. = 24,45 m.
27 m. 54 cm. = 27,54 m.

Demgemäß ist der Flächeninhalt = 24,45 × 27,54 = 673,3530 □m. = 6 a. 73,3530 □m. = 6 a. 73 □m. 35,30 □dm. = 6 a. 72 □m. 35 □dm. 30 □cm.

Uebungsaufgaben. In einem Rechteck ist

	Gegeben: Länge.	Breite.	Gesucht: Flächeninhalt.
21.	2 m.	80 cm.	1 □m. 60 □dm. = 1,6 □m.
22.	3 m.	120 cm.	3 □m. 60 □dm. = 3,6 □m.
23.	2,4 m.	82½ cm.	1 □m. 98 □dm. = 1,98 □m.
24.	8½ Km.	12 m.	10⅕ □ Hm.
25.	148,25 m.	186,12 m.	2 Ha. 1 a. 79,79 □m.

Ferner:

26. Wie viel kostet ein Ackerplan von der Form eines Rechtecks, welches 75 m. lang und 48 m. breit ist, wenn das Hektar zu 2000 Mark gerechnet wird? (720 Mk.)
27. Wie viel beträgt die Pachtsumme für ein Ackerstück von 54 m. Länge und 45 m. Breite, wenn auf das Ar $1\frac{1}{2}$ Mk. gerechnet wird? (36,45 Mk. = 36 Mk. 45 Pfg.)
28. Der Kaufpreis für einen Ackerplan von 280 m. Länge und 125 m. Breite beträgt 8400 Mk. Wie viel gilt hiernach a. das □m.? b. das Ar? c. das Hektar? (a. 24 neue Pf.; b. 24 Mk.; c. 2400 Mk.)
29. Wie viel kostet die Umzäunung eines Gartens von $46\frac{1}{2}$ m. Länge und 90 m. Breite, wenn auf je 3 m. Zaunlänge 5 Mk. gerechnet werden? (255 Mk.)
30. Zum Dielen eines Zimmers von 9 m. Länge und 6 m. Breite werden Bretter von 6 m. Länge und 45 cm. Breite verwendet. Wie viel Bretter sind erforderlich? (20 Stck.)

3. Ist der Flächeninhalt eines Rechtecks und außerdem noch eine Ausdehnung desselben gegeben, so wird die unbekannte Ausdehnung gefunden, wenn man die Maßzahl des Flächeninhalts durch diejenige der gegebenen Ausdehnung dividirt, wobei jedoch vorausgesetzt ist, daß das gegebene Flächenmaß und das gleichfalls bekannte Linienmaß dieselbe Grund-Benennung haben.

Beispiel. Ein Ackerstück, welches $81\frac{1}{4}$ Ar enthält, ist 65 m. breit. Wie viel beträgt seine Länge?

Es sind $81\frac{1}{4}$ Ar = 8125 □m. Die Zahl 8125, durch 65 dividirt, ergiebt 125, so daß die gesuchte Länge 125 m. beträgt.

Uebungsaufgaben. Von einem Rechteck ist

Gegeben: Inhalt.	Breite.	Gesucht: Länge.
31. 5 a. 60 □m.	16 m.	35 m.
32. $2\frac{1}{2}$ Ha.	$\frac{1}{8}$ Km.	$\frac{1}{5}$ Km.
33. $7\frac{1}{5}$ Ha.	$\frac{1}{4}$ Km.	0,36 Km.
34. 50 Ha.	$\frac{5}{8}$ Km.	$\frac{4}{5}$ Km.
35. $1\frac{3}{4}$ Ha.	112 m.	$156\frac{1}{4}$ m.

Ferner:

36. Ein Ackerplan von 84 m. Länge und 60 m. Breite wird gegen einen andern, der eben so gut, aber 63 m. breit ist, vertauscht. Wie viel beträgt die Länge des zweiten Ackerplans? (80 m.)

37. Wie viel beträgt die Seitenlänge eines quadratförmigen Gartens, welcher eben so groß ist als ein anderer Garten von 48 m. Länge und 27 m. Breite? (36 m.)

38. In wie viel Tagen graben 18 Mann einen Garten von 75 m. Länge und 27 m. Breite um, wenn zur Bearbeitung von 9 Ar 12 Mann 3 Tage lang erforderlich sind? (10 Tage.)

39. Wie viel m. Zeug von 88 cm. Breite sind zu einem Kleide erforderlich, zu welchem man bisher 11 m. Zeug von 84 cm. Breite verwenden mußte? ($10\frac{1}{2}$ m.)

40. Wie groß ist der Umfang eines rechtwinklig-vierseitigen Ackerplans von $12\frac{4}{5}$ a. Flächeninhalt, wenn die Breite 32 m. beträgt? (144 m.)

§. 4.

Die schiefwinkligen Parallelogramme.

(Rhombus und Rhomboid.)

1. Der Rhombus (die Raute oder das verschobene Quadrat) ist das gleichseitig-schiefwinklige Parallelogramm. Diese Figur hat nämlich 4 gleiche Seiten und vier schiefe Winkel, d. i. zwei gleiche spitze und zwei gleiche stumpfe. Die gleichen Winkel liegen nicht an einer und derselben Seite, sondern stehen einander gegenüber. Im Rhomboid, dem ungleichseitig-schiefwinkligen Parallelogramm sind nur die gegenüberstehenden (parallelen) Seiten unter sich gleich; dasselbe gilt von den gegenüberstehenden Winkeln. Der senkrechte Abstand der Grundlinie von der ihr gegenüberliegenden Seite (Parallele) wird die Höhe der Raute, bezüglich des Rhomboids genannt. Diejenige gerade Linie, welche innerhalb der Figur zwei Ecken derselben verbindet, heißt Diagonale. In jedem Viereck, also auch in jedem Parellelogramme, kann man zwei Diagonalen

ziehen. Die beiden Diagonalen des Rhombus (auch die des Quadrats) durchschneiden sich rechtwinklig, diejenigen des Rechtecks und Rhomboids aber schiefwinklig.

2. Um den Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogramms zu finden, drücke man Grundlinie und Höhe desselben in einerlei Maß aus und multiplicire diese Maßzahlen mit einander. S. § 3 Nr. 2.

Beispiel. Ein Feld hat die Form eines schiefwinkligen Parallelogramms von 65 m. Grundlinie und 56 m. Höhe; wie viel beträgt sein Flächeninhalt?

$$65 \times 56 = 3640 \,\square\text{m.} = 36 \text{ a. } 40 \,\square\text{m.}$$

Uebungsaufgaben.

	Gegeben:		Gesucht:
	Grundlinie.	Höhe.	Flächeninhalt.
41.	$28\frac{1}{2}$ cm.	$20\frac{2}{3}$ cm.	589 □cm.
42.	$16\frac{1}{4}$ cm.	$14\frac{2}{5}$ cm.	234 □cm.
43.	$1\frac{1}{2}$ m.	96 cm.	1,44 □m.
44.	$6\frac{1}{4}$ m.	5,64 m.	$35\frac{1}{4}$ □m.
45.	$91\frac{1}{4}$ m.	40 m.	$35\frac{1}{2}$ Ar.

3. Der Inhalt einer Raute läßt sich aber auch noch in anderer Weise bestimmen, und zwar mit Hülfe ihrer beiden Diagonalen. Zu diesem Zwecke hat man nur die beiden Diagonalen mit einander zu multiplicren und von der gefundenen Zahl die Hälfte zu nehmen.

Beispiel. Wie groß ist ein Rhombus, wenn die beiden Diagonalen desselben bezüglich 16 cm. und $12\frac{1}{2}$ cm. lang sind?

Das halbe Produkt der Diagonalen beträgt $8 \times 12\frac{1}{2} = 100$ □cm. = 1 □dm., womit der Flächeninhalt des erwähnten Rhombus gefunden ist.

Uebungsaufgaben. In einem Rhombus sind

	Gegeben:	Gesucht:
	die beiden Diagonalen.	Flächeninhalt.
46.	28 cm. und $16\frac{1}{4}$ cm.	$227\frac{1}{2}$ □cm.
47.	36 cm. und $20\frac{1}{2}$ cm.	369 □cm.
48.	$6\frac{1}{4}$ m. und $3\frac{1}{5}$ m.	10 □m.
49.	$17\frac{1}{2}$ m. und $13\frac{3}{5}$ m.	119 □m.

Ferner:

50. Ein Rechteck von 6 m. Länge und 4 m. Breite umschließt einen Rhombus derartig, daß die Scheitel der Winkel des letzteren $^1/_4$ m. von der Mitte der benachbarten Seite des Rechtecks entfernt sind. Wie viel beträgt der Flächeninhalt dieses Rhombus? ($9^5/_8$ □m.)

51. Man hat die Seiten etnes Rechtecks von 8 m. Länge und 6 m. Breite halbirt und je zwei aufeinander folgende Halbirungspunkte geradlinig verbunden. Wie groß ist der von den erwähnten Halbirungslinien eingeschlossene Rhombus? (24 □m.)

4. Wie beim Rechteck (§ 3 Nr. 3.), so kann man auch bei jedem schiefwinkligen Parallelogramm aus dem Flächeninhalte und einer Ausdehnung desselben (z. B. Grundlinie) die andere Ausdehnung (z. B. die Höhe), bei dem Rhombus insbesondere aus dem Flächeninhalte und einer Diagonale die andere Diagonale bestimmen.

Uebungsaufgaben. In einem Parallelogramm ist

Gegeben:		Gesucht:
Flächeninhalt.	Grundlinie.	Höhe.
52. 84 a.	105 m.	80 m.
53. 96 a.	80 m.	120 m.
54. 1 Ha.	$^1/_8$ Km.	80 m.
55. 60 □m.	$9^3/_5$ m.	$6^1/_4$ m.

Ferner ist in einem Rhombus

Gegeben:		Gesucht:
Flächeninhalt.	Eine Diagonale.	Die andere Diagonale.
56. 135 □m.	18 m.	15 m.
57. 63 □m.	$17^1/_2$ m.	$7^1/_5$ m.
58. 30 □m.	$9^3/_5$ m.	$6^1/_4$ m.
59. 1 a.	20 m.	10 m.
60. 1 Ha.	160 m.	125 m.

§. 5.

Das Trapez (Paralleltrapez.)

1. Das Trapez (auch Paralleltrapez genannt) ist ein Viereck mit nur zwei gleichlaufenden Seiten, welche aber verschiedene

Länge haben. Die beiden andern einander gegenüberstehenden Seiten sind ungleichlaufend. Die senkrechte Entfernung der beiden parallelen (gleichlaufenden) Seiten von einander heißt Höhe des Trapezes. Die mittlere Länge des Trapezes wird gefunden, wenn man die Länge der beiden gleichlaufenden Seiten zusammenzählt und hiervon die Hälfte nimmt.

2. Die mittlere Länge des Trapezes mit der Höhe desselben multiplicirt, ergiebt den Flächeninhalt der Figur, während die Höhe gefunden wird, wenn man den Flächeninhalt durch die mittlere Länge des Trapezes dividirt.

Erstes Beispiel. Von den beiden gleichlaufenden Seiten eines trapezförmigen Bauplatzes ist die eine 68 m., die andere 94 m. lang; die senkrechte Entfernung beider von einander beträgt 54 m. Welche Größe hat dieser Platz?

Summe der beiden Parallelen $= 68 + 94 = 162$ m.
Mittlere Länge des Trapezes $= {}^{162}/_{2} = 81$ m.
Flächeninhalt des Platzes $= 81 \times 54 = 4374$ □m. $=$
43 a. 74 □m.

Zweites Beispiel. Wenn von obigem Bauplatze der Flächeninhalt $=$ 43 a. 74 □m., die kleinere Parallele $=$ 68 m. und die größere $=$ 94 m. gegeben ist, so findet man die Breite (Höhe) des Platzes auf folgende Weise:

Summe der Parallelen $= 68 + 94 = 162$ m.
Mittlere Länge des Trapezes $= {}^{162}/_{2} = 81$ m.
Flächeninhalt des Trapezes $=$ 43 a. 74 □m. $= 4374$ □m.

Breite Platzes des $= \frac{4374}{81} = 54$ m.

Uebungsaufgaben. Von einem Trapez sind

	Gegeben:	Gesucht:
61.	die Parallelen $= 60$ m. u. 48 m., die Höhe $= 20$ m.	der Flächeninhalt $=$ $10^{4}/_{5}$ a.
62.	die Parallelen $= 45$ m. u. 35 m., die Höhe $= 18$ m.	der Flacheninhalt $=$ $7^{1}/_{5}$ a.
63.	der Flächeninhalt $= 6$ a., die Parallelen $= 36$ m. und 24 m.	die Höhe $= 20$ m.

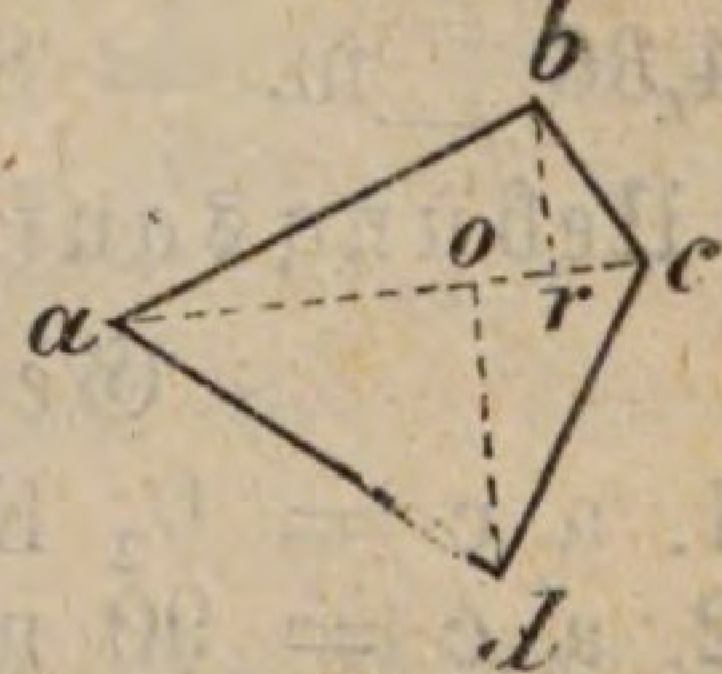
Gegeben:	Gesucht:
64. der Flächeninhalt = 9 a., die eine Parallele = $34\frac{1}{2}$ m., die Höhe = 30 m.	die andere Parallele = $25\frac{1}{2}$ m.
65. der Flächeninhalt = 7 a., die eine Parallele = 30 m., die Höhe = 20 m.	die andere Parallele = 40 m.

§. 6.

Das Trapezoid oder das unregelmäßige Viereck.

1. Im Trapezoid sind keine parallelen Seiten. Um ein solches Viereck (Fig. 1.) zu berechnen, hat man eine Diagonale a c zu ziehen, und aus den derselben gegenüberliegenden Ecken der Figur die Höhen b r und d o zu fällen, welche senkrecht auf der Diagonale a. c stehen. Die halbe Summe dieser beiden Höhen, mit der Diagonale a c multiplicirt, ergiebt den Flächeninhalt der Figur.

Fig. 1.



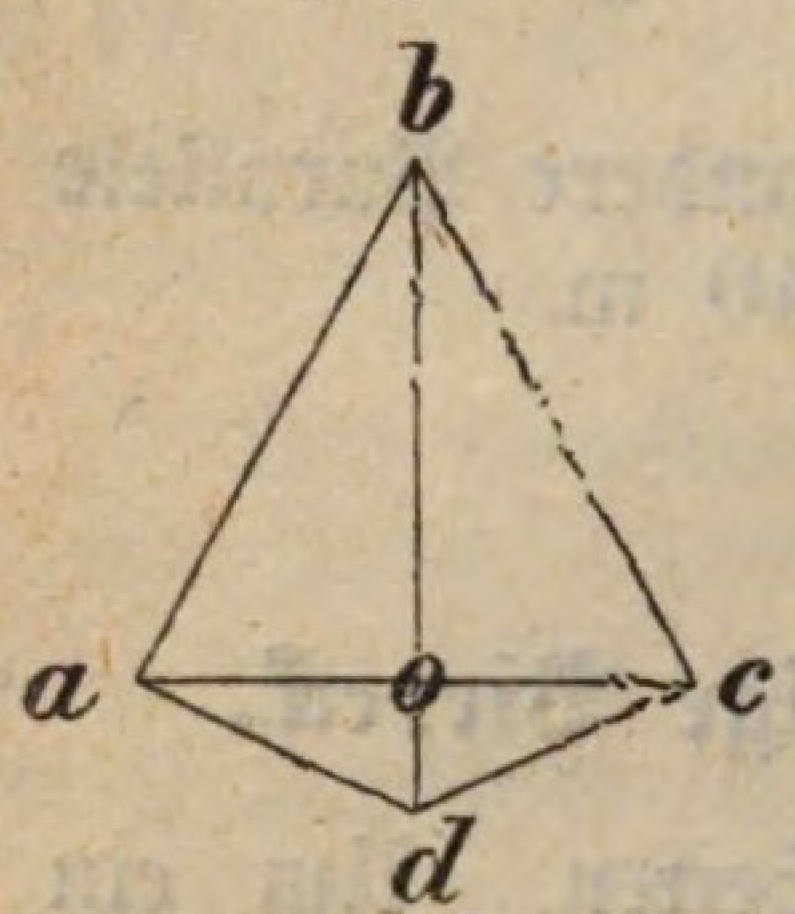
Beispiel. In einem Ackerstück von der Form der Fig. 1 sei die Ausdehnung a c = 100 m., die Höhe b r = 56 m. und die Höhe d o = 88 m., so findet sich weil die halbe Summe der beiden genannten Höhen $\frac{56 + 88}{2}$ = 28 + 44 = 72 m. beträgt, die Größe des erwähnten Ackerstücks = 100 × 72 = 7200 □m. = 72 a.

Uebungsaufgaben mit Benutzung der Fig. 1.

Gegeben:	Gesucht:
66. a c = 60 m., b r = 20 m., d o = 30 m.	Größe = 15 a.
67. d c = 80 m., b r = $36\frac{1}{2}$ m., d o = $47\frac{1}{2}$ m.	Größe = $33\frac{3}{5}$ a.
68. a c = 90 m., b r = $74\frac{1}{2}$ m., d o = $85\frac{1}{2}$ m.	Größe = 72 a.
69. a c = 120 m., b r = 60 m., d o = 80 m.	Größe = 84 a.
70. a c = $\frac{1}{8}$ Km. b r = $\frac{1}{10}$ Km., d o = $\frac{3}{20}$ Km.	Größe = $1\frac{9}{16}$ Ha.

2. Eine besondere Art der Trapezoide sind die Deltoide oder die symmetrischen Vierecke. Das Deltoid (Fig. 2) hat zwei Paar gleiche Seiten. Die gleichen Seiten liegen aber nicht einander gegenüber, sondern stoßen zusammen. (a b = b c, a d = d c). Die beiden Diagonalen (a c und b d) des Deltoids durchschneiden sich (in o) rechtwinklig. Der Flächeninhalt eines solchen Vierecks ist gleich dem halben Produkte der beiden Diagonalen. Beträgt z. B. die eine Diagonale a c 11,4 m. und die andere b d 14,8 m., so ist das Produkt der Diagonalen = 11,4 × 14,8; folglich ist der Flächeninhalt des Deltoids = $\frac{11,4 \times 14,8}{2}$ = 84,36 □m. = 84 □m. 36 □dm.

Fig. 2.



Uebungsaufgaben mit Benutzung der Fig. 2.

	Gegeben:	Gesucht:
71.	a c = $\frac{1}{2}$ Km., b d = $\frac{1}{5}$ Km.	Größe = 5 Ha.
72.	a c = 90 m., b d = 80 m.	Größe = 36 a.
73.	a c = $18\frac{3}{4}$ m. b d = $12\frac{4}{5}$ m.	Größe = $1\frac{1}{5}$ a.
74.	a c = 40 m., Größe = 12 a.	b d = 60 m.
75.	b d = 75 m., Größe = 24 a.	a c = 64 m.

§ 7.

Von den Dreiecken.

Es giebt 7 Arten von Dreiecken, nämlich:

1) das gleichseitige Dreieck mit 3 gleichen Seiten und 3 gleichen Winkeln;

2) das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck, welches entsteht, wenn man einen rechten Winkel, dessen Schenkel gleich sind, durch eine dritte Seite schließt;

3) das spitzwinklig-gleichschenklige Dreieck, aus einem gleichschenkligen spitzen Winkel entstehend;

4) das stumpfwinklig-gleichschenklige Dreieck, welchem ein gleichschenkliger stumpfer Winkel zu Grunde liegt;

5) das rechtwinklig-ungleichseitige Dreieck, dessen rechter Winkel ungleiche Schenkel hat;
6) das spitzwinklig-ungleichseitige Dreieck mit lauter ungleichen Seiten und drei ungleichen spitzen Winkeln;
7) das stumpfwinklig-ungleichseitige Dreieck mit einem stumpfen Winkel, dessen Schenkel ungleich sind.

§ 8.

Das rechtwinklige Dreieck.

1. Die Seiten, welche den rechten Winkel bilden, heißen Katheten, während diejenige Seite, welche diesem Winkel gegenüberliegt, die Hypotenuse genannt wird. Betrachtet man die eine Kathete als Grundlinie des Dreiecks, so ist die andere Kathete die Höhe desselben. Da das rechtwinklige Dreieck die Hälfte seines Rechtecks ist, d. h. desjenigen Rechtecks, mit welchem es gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat, so ist der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks gleich dem halben Produkt seiner Katheten.

Beispiel. Wie groß ist ein rechtwinkliges Dreieck, wenn die Katheten desselben bezüglich 56 m. und 40 m. betragen? Der Flächeninhalt des erwähnten Dreiecks ist $= \frac{56 \times 40}{2}$ $= 56 \times 20 = 1120$ □m. $= 11\frac{1}{5}$ a.

Uebungsaufgaben.

	Gegeben: Die Katheten.	Gesucht: Flächeninhalt.
76.	34 m. und 25 m.	$4\frac{1}{4}$ a.
77.	35 m. und 26 m.	4,55 a.
78.	60 m. und 50 m.	15 a.
79.	$72\frac{1}{2}$ m. und $38\frac{2}{5}$ m.	13,92 a.
80.	$37\frac{1}{3}$ m. und 24,8 m.	4,65 a.

2. Wird auf jeder der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ein Quadrat errichtet, so ist das Quadrat der Hypotenuse ebenso groß als die beiden Quadrate der Katheten zusammengenommen. Diese Wahrheit ist in der Geometrie unter

dem Namen: „Pythagoräischer Lehrsatz“ bekannt. Man bedient sich dieses Satzes, um aus den beiden Katheten die Hypotenuse, oder aus der Hypotenuse und einer Kathete die andere Kathete zu berechnen.

Erstes Beispiel. Man hat auf dem Felde zwei Stäbe, den einen von 3 m. und den andern von 4 m. Länge, unter einem rechten Winkel zusammengelegt. Wie lang muß ein dritter Stab sein, damit derselbe den erhaltenen rechten Winkel zum rechtwinkligen Dreieck vervollständigt?

Quadrat der kleineren Kathete = $3 \times 3 = 9$
Quadrat der größeren Kathete = $4 \times 4 = 16$
Quadrat der Hypotenuse = 25;
folglich die Hypotenuse selbst = $\sqrt{25} = 5$.

Der dritte Stab muß demgemäß 5 m. lang sein.

Zweites Beispiel. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse = 17 m. und die eine der Katheten = 8 m. Welche Länge hat hiernach die andere Kathete?

Quadrat der Hypotenuse = $17 \times 17 = 289$
Quadrat der gegebenen Kathete = $8 \times 8 = 64$
Unterschied = 225.

Dieser Unterschied ist gleich dem Quadrat der gesuchten Kathete; folglich beträgt letztere $\sqrt{225} = 15$ m., denn man hat

$\sqrt{2|25} = 1\ (0)$
1
$2 \times 1 = 2$ in 12 = 5
$5 \times 2 = 10$ 10 Sa. 15
25
$5 \times 5 = 25$

Uebungsaufgaben.

	Gegeben:	Gesucht:
81.	Katheten = 24 m. und 7 m.	Hypotenuse = 25 m.
82.	Katheten = 21 m. und 20 m.	Hypotenuse = 29 m.
83.	Katheten = 9 m. und 40 m.	Hypotenuse = 41 m.
84.	Katheten = 35 m. und 12 m.	Hypotenuse = 37 m.
85.	Katheten = 45 m. und 28 m.	Hypotenuse = 53 m.

	Gegeben:	Gesucht:
86.	Kath. = 33 m., Hypot. = 65 m.	die andere Kath. = 56 m.
87.	Kath. = 84 m., Hypot. = 85 m.	die andere Kath. = 13 m.
88.	Kath. = 63 m., Hypot. = 65 m.	die andere Kath. = 16 m.
89.	Kath. = 55 m., Hypot. = 73 m.	die andere Kath. = 48 m.
90.	Kath. = 80 m., Hypot. = 89 m.	die andere Kath. = 39 m.

§ 9.

Das gleichseitige Dreieck.

1. Wird aus der Spitze des gleichseitigen (regulären) Dreiecks eine Linie senkrecht auf die gegenüberliegende Seite (Grundlinie) gefällt, so ist diese Linie die Höhe des regulären Dreiecks, durch welche letzteres in zwei congruente (d. i. nach Größe und Form vollkommen gleiche) rechtwinklige Dreiecke getheilt wird, von denen jedes die Höhe und die halbe Seite des regulären Dreiecks zu Katheten und die ganze Seite desselben zur Hypotenuse hat. Demnach kann man mittels des Pythagoräischen Lehrsatzes (§ 8) die Höhe berechnen, sobald nur die Seite des regulären Dreiecks bekannt ist; und zwar findet sich auf diesem Wege die Höhe $= \frac{866}{1000} \times$ Seite des regulären Dreiecks, folglich der Flächeninhalt eines solchen Dreieck gleich $\frac{433}{1000}$ des Quadrats der Seite.

Anmerk. Allgemein ist im regulären Dreieck

die Höhe $= a. \ ^1/_2\sqrt{3},$

der Flächeninhalt $= a^2. \ ^1/_4\sqrt{3},$

wo a. die gegebene Seite des regulären Dreiecks bezeichnet, sowie a^2 das Produkt $a \times a$.

Beispiel. Welchen Flächeninhalt hat ein Grasplatz von der Form eines gleichseitigen Dreiecks mit 20 m. Seitenlänge?

Quadrat der Seite = 20 × 20 = 400 □m.

Inhalt des Dreiecks $= \frac{433 \times 400}{1000} = 433 \times 0{,}4 =$ 173,2 oder $173^1/_5$ □m.

Uebungsaufgaben. In einem regulären Dreieck ist

Gegeben: die Seite.	Gesucht: Höhe.	Flächeninhalt.
91. 5 m.	4,33 m.	10,825 □m.
92. 4 m.	3,464 m	6,928 □m.
93. 10 m.	8,66 m.	43,3 □m.
94. 30 m.	25,98 m.	389,7 □m.
95. 35 m.	30,31 m.	530,425 □m.

2. Ist im regulären Dreieck nur die Höhe angegeben, so findet sich zunächst die Seite $= \frac{1000}{866} \times$ Höhe, und alsdann der Flächeninhalt des erwähnten Dreiecks $= \frac{500}{866}$ des Quadrats der Höhe.

Anmerk. Wird die Höhe des regulären Dreiecks mit h bezeichnet, so findet sich allgemein

$$\text{die Seite} = h \times {}^2/_3\sqrt{3},$$
$$\text{der Flächeninhalt} = h^2 \times {}^1/_3\sqrt{3},$$

wo h^2 das Produkt $h \times h$ andeutet.

Beispiel. Ein gleichseitiges Dreieck soll 10 cm. hoch werden; a. wie lang ist seine Seite zu nehmen; b. wie groß ist sein Flächeninhalt?

a. die Seite ist $= \frac{1000 \times 10}{866} = 11\,{}^{237}/_{433}$ oder 11,5473 cm., d. i. nahe $11\,{}^1/_2$ cm.

b. der Flächeninhalt ist $= \frac{500 \times 10 \times 10}{866} = 57\,{}^{319}/_{433}$ oder 57,7367 □cm., d. i. nahe $57\,{}^3/_4$ □cm.

Uebungsaufgaben. In einem Dreieck ist

Gegeben: die Höhe.	Gesucht: Seite.	Flächeninhalt.
96. 43,3 cm.	50 cm.	1082,5 □cm.
97. 86,6 cm.	1 cm.	4,330 □cm.
98. 12 cm.	13,8568 cm.	83,1177 □cm.
99. 15 cm.	16,321 cm.	129,9076 □cm.
100. 20 cm.	23,0964 cm.	230,9468 □cm.

3. Umgekehrt kann aber auch aus dem Flächeninhalte des regulären Dreiecks die Seite und die Höhe desselben berechnet werden.

Beispiel. Ein 7794 □m. großer Platz hat die Form eines regulären Dreiecks. Es soll a. die Seite, b. die Höhe dieses Dreiecks berechnet werden.

a. Es sind $\frac{433}{1000}$ des Quadrats der Seite = 7794 □m.; daher dieses Quadrat $= \frac{7794 \times 1000}{433} = 18 \times 1000 =$ 18000 □m.; folglich die gesuchte Seite =

$$\sqrt{1|80|00} = 134 \text{ m.}$$

$$\begin{array}{rr} & 1 \\ \hline 23 \text{ in} & 80 \\ & 69 \\ \hline 294 \text{ in} & 11\,00 \\ & 10\,56 \\ \hline & 44 \end{array}$$

wobei der letzte Rest 44, wenn es nicht auf große Genauigkeit ankommt, nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht.

b. Aus der Seite kann nun auch die Höhe (nach Nr. 1) sehr leicht berechnet werden. Um letztere jedoch unmittelbar aus dem Flächeninhalte zu finden, hat man nur zu erwägen, daß dieser Inhalt $= \frac{500}{866}$ des Quadrats der Höhe ist. Demgemäß findet sich das Quadrat der Höhe $= \frac{866 \times 7795}{500} =$ $\frac{1732 \times 7794}{1000} = \frac{17320 \times 7794}{10000} = \frac{134992080}{10000}$, also die Höhe selbst $= \sqrt{\frac{134992080}{10000}} = \frac{\sqrt{134992080}}{\sqrt{10000}} =$ $\frac{\sqrt{134992080}}{100}$.

```
Es ist aber      √1|34|99|20|80 = 11618
                   1
      21 in        34
                   21
     226 in        13 99
                   13 56
    2321 in          43 20
                     23 21
   29228 in          19 99 80
                     18 58 24
Der Rest              1 41 56
```

kann unbeachtet bleiben.

Hiernach ist die gesuchte Höhe $= \frac{11618}{100} = 116{,}18$ m.

Anmerk. 1. Wird der Flächeninhalt des regulären Dreiecks mit F bezeichnet, so ist allgemein

die Seite $= 2.\sqrt{\frac{F.}{3}\sqrt{3}}$

die Höhe $= \sqrt{F\sqrt{3}.}$

Anmerk. 2. Wie das gleichseitige Dreieck, so wird auch das gleichschenklige durch die Höhe (auf die gewöhnliche Grundlinie) in zwei congruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

Uebungsaufgaben. Im regulären Dreieck ist

Gegeben: der Inhalt.	Gesucht: die Seite.	die Höhe.
101. 3□m.	$2\sqrt{\sqrt{3}}$ m. = 2,632 m.	$\sqrt{3\sqrt{3}}$m. = 2,279 m.
102. 6□m.	$2\sqrt{2\sqrt{3}}$m. = 3,722 m.	$\sqrt{6\sqrt{3}}$m. = 3,223 m.
103. 15□m.	$2\sqrt{5\sqrt{3}}$m. = 5,866 m.	$\sqrt{15\sqrt{3}}$m. = 5,097 m

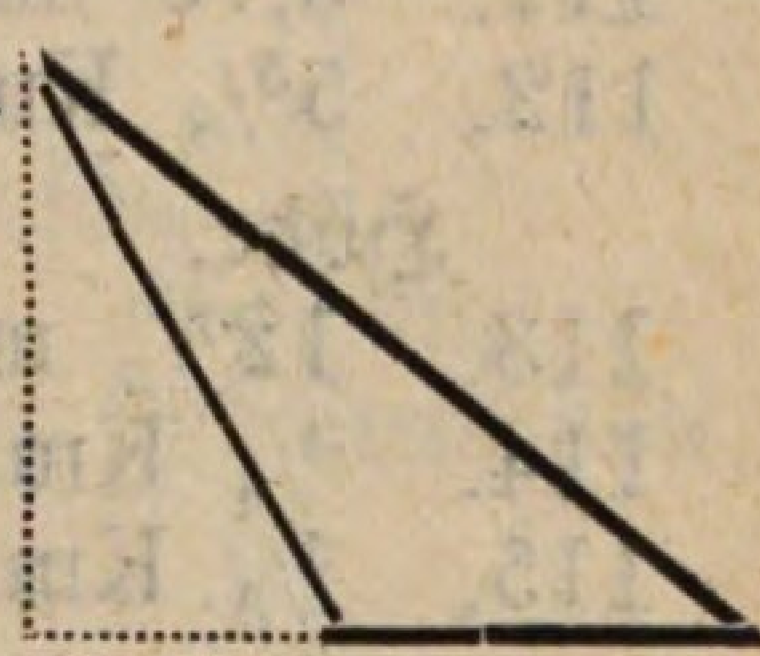
Gegeben: der Inhalt.	Gesucht: die Seite.	die Höhe.
104. 18 □m.	$2\sqrt{6\sqrt{3}\text{m.}} = 6,447$m.	$\sqrt{18\sqrt{3}\text{m.}} = 5,584$m
105. 16 □m.	$8\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{3}\text{m.}} = 6,079$m	$4\sqrt{\sqrt{3}\text{m.}} = 5,264$m

§. 10.

Berechnung jedes beliebigen Dreiecks.

5. Oft geschieht es, daß die Höhe des Dreiecks aus der Spitze nicht unmittelbar auf die Grundlinie, sondern nur auf die Verlängerung derselben rechtwinklig trifft (Fig. 3) Dies hat jedoch auf die Berechnung keinen Einfluß, indem der Flächeninhalt eines jeden Dreiecks dadurch gefunden wird, daß man Grundlinie und Höhe mit einander multiplicirt und vom Produkte die Hälfte nimmt. Hieraus folgt zugleich, daß sich die Höhe findet, wenn der verdoppelte Flächeninhalt durch die Grundlinie dividirt wird, während die Grundlinie sich ergiebt, wenn man hier die Höhe zum Divisor nimmt.

Fig. 3.



Erstes Beispiel. Wie groß ist ein Dreieck von 4 m. Grundlinie und 5,6 m. Höhe?

Flächeninhalt des Dreiecks $= \frac{4 \times 5,6}{2} = 2 \times 5,6 =$ 11,2 m.

Zweites Beispiel. Ein Dreieck von 1,8 m. Grundlinie hat 1,44 □m. Inhalt; wie groß ist seine Höhe?

Das Doppelte des Flächeninhalts beträgt 2,88 □m., mithin die gesuchte Höhe $\frac{2,88}{1,8} = \frac{0,48}{0,3} = \frac{0,16}{0,1} =$ $\frac{16}{10} =$ 1,6 m.

Drittes Beispiel. Ein Dreieck soll 8 cm. hoch werden und 36 □cm. Inhalt haben; wie lang hat man die Grundlinie zu nehmen?

Doppelter Inhalt = 2 × 36 = 72 □cm., mithin die Grundlinie = $^{72}/_{8}$ = 9 cm.

Uebungsaufgaben. In einem Dreieck ist

Gegeben:		Gesucht:
Grundlinie.	Höhe.	Inhalt.
106. 50 m.	40 m.	10 a.
107. 80 m.	60 m.	24 a.
108. $1^1/_4$ Km.	$1^3/_5$ Km.	1 □Km. = 100 Hn.
109. $2^2/_5$ Km.	$1^7/_8$ Km.	$2^1/_4$ □Km. = 225 Ha.
Grundlinie.	Inhalt.	Höhe.
110. $4^1/_2$ m.	18 □m.	8 m.
111. 3,75 m.	6 □m.	3,20 m.
112. $5^5/_8$ Km.	450 Ha.	$1^3/_5$ Km.
Höhe.	Inhalt.	Grundlinie.
113. $12^1/_2$ m.	40 □m.	6,4 m.
114. $^3/_8$ Km.	$4^{11}/_{16}$ Ha.	$^1/_4$ Km.
115. $^3/_5$ Km.	$18^3/_4$ Ha.	$^5/_8$ Km.

2. Sind die drei Seiten eines Dreiecks bekannt, so kann aus diesen unmittelbar der Flächeninhalt desselben gefunden werden. Zu diesem Zwecke hat man die drei Seiten zusammenzuzählen und von der Summe die Hälfte zu nehmen, wodurch sich der halbe Umfang des Dreiecks ergiebt. Hierauf wird der halbe Umfang das eine Mal um die erste Seite, das andere Mal um die zweite Seite, das dritte Mal um die dritte Seite verändert. Die erhaltenen drei Reste multiplicire man miteinander und das gefundene Produkt ferner mit dem halben Umfange, worauf nur noch die Quadratwurzel aus der zuletzt gefundenen Zahl zu ziehen ist.

Anmerk. Wird in einem Dreieck der halbe Umfang mit $\frac{u}{2}$, die erste Seite mit a, die zweite mit b, die dritte mit c bezeichnet, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks allgemein

$$=\sqrt{\frac{u}{2}\left(\frac{u}{2}-a\right)\left(\frac{u}{2}-b\right)\left(\frac{u}{2}-c\right)}.$$

Beispiel. Welche Größe hat ein Dreieck, wenn seine Seiten der Reihe nach 53 cm., 45 cm. und 28 cm. betragen?

Umfang des Dreiecks $= 53 + 45 + 28 = 126$ cm.

Halber Umfang des Dreiecks $= \frac{126}{2} = 63$ cm.

Erster Unterschied $= 63 - 53 = 10$ cm.
Zweiter Unterschied $= 63 - 45 = 18$ cm.
Dritter Unterschied $= 63 - 28 = 35$ cm.

Die Multiplication des halben Umfangs mit den gefundenen drei Unterschieden ergiebt
$63 \times 10 \times 18 \times 35$ oder $9 \times 7 \times 2 \times 5 \times 18 \times 7 \times 5$,
woraus man erhält $9 \times 49 \times 25 \times 36$,
welche Zahlen sämmtlich Quadratzahlen sind. Nun ist aber der gesuchte Flächeninhalt $= \sqrt{9 . 49 . 25 . 36}$, so daß derselbe $3 . 7 . 5 . 6 = 630$ □cm. beträgt, womit die Größe des obigen Dreiecks gefunden ist.

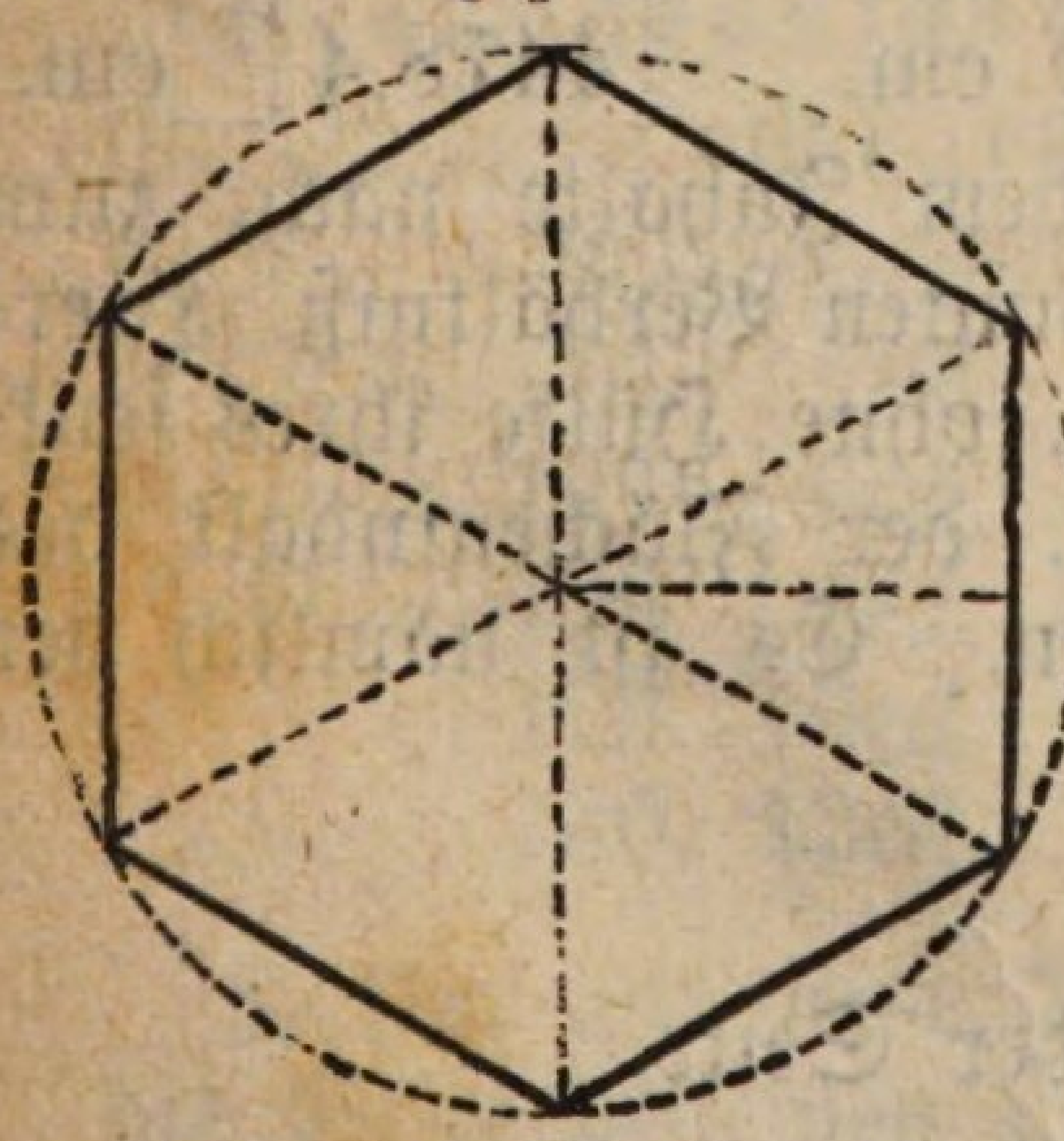
Uebungsaufgaben. In einem Dreieck sind

	Gegeben: die Seiten. a.	b.	c.	Gesucht: der Flächeninhalt. □m.
116.	10. m.	8 m.	6 m.	24
117.	17. m.	15 m.	8 m.	60
118.	21. m.	17 m.	10 m.	84
119.	28. m.	25 m.	17 m.	210
120.	25. m.	30 m.	25 m.	300

§ 11.

Die regelmäßigen Vielecke.

Fig. 4.



1. Ein Vieleck, d. h. eine Figur von mehr als vier Seiten, heißt regelmäßig, wenn sowohl die Seiten als auch die Winkel desselben unter sich sämmtlich gleich sind. Durch die Eckpunkte des regelmäßigen Vielecks läßt sich eine Kreislinie legen. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist zugleich der Mittelpunkt des regulären Viel-

ecks. (Fig. 4). Durch gerade Linien aus dem Mittelpunkte nach den Ecken zerfällt das reguläre Vieleck in so viel congruente Dreiecke, als dasselbe Seiten hat. Die Höhe eines solchen Dreiecks ist die gerade Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkte und der Mitte der gegenüberliegende Vielecksseite. Der Inhalt eines Dreiecks, mit der Seitenzahl des Vielecks multiplicirt, ergiebt den Flächeninhalt des letzteren.

Beispiel. Wie groß ist ein regelmäßiges Achteck, wenn die Seite desselben 4,8 m. und ihr senkrechter Abstand vom Mittelpunkt ungefähr 5,8 m. beträgt?

Inhalt eines Dreiecks $= \frac{4,8 \times 5,8}{2} = 4,8 \times 2,9 =$ 13,92 □m.

Inhalt der 8 Dreiecke $= 8 \times 13,92 = 111,36$ □m. womit der Flächeninhalt des regulären Achtecks gefunden ist.

Anmerk. Jedes reguläre Polygon (Vieleck) ist gleich einem Dreieck, das den Perimeter (Umfang) des ersteren zur Grundlinie und den Radius des in dasselbe einbeschriebenen Kreises zur Höhe hat. Dieser Radius, auch kleinster Radius genannt, ist die oben erwähnte gerade Verbindungslinie zwischen dem Mittelpunkte und der Mitte jeder Seite des Polygons.

Uebungsaufgaben.

	Gegeben:		Gesucht:
Reguläres Polygon.	Seite.	Kleinster Radius.	Inhalt.
121. Sechseck.	50 cm.	43,3 cm.	6495 □cm.
122. Fünfeck.	20 cm.	13,76 cm.	688 □cm.
123. Achteck.	20 cm.	24,14 cm.	1931,2 □cm.
124. Zehneck.	20 cm.	30,78 cm.	3078 □cm.
125. Zwölfeck.	20 cm.	37,32 cm.	4478,4 □cm.

2. Jedes reguläre Polygon steht, dem Inhalte nach, zum Quadrate seiner Seite in einem bestimmten Verhältniß. Hiernach kann schon aus der Seite allein, ohne Hülfe ihres senkrechten Abstandes vom Mittelpunkte, der Flächeninhalt des regulären Polygons berechnet werden. Es ist nämlich der Inhalt des

regulären
5ecks = 1,7205 }
6ecks = 2,5980 } × Quadrat der Seite.

regulären

7ecks	=	3,6341	× Quadrat der Seite.
8ecks	=	4,8284	
9ecks	=	6,1818	
10ecks	=	7,6942	
11ecks	=	9,3600	
12ecks	=	11,1961	
13ecks	=	13,1858	
14ecks	=	15,3345	
15ecks	=	17,6423	
16ecks	=	20,1094	
17ecks	=	22,7303	
18ecks	=	25,5208	
19ecks	=	28,4652	
20ecks	=	31,5687	
24ecks	=	45,5745	
25ecks	=	49,4738	
30ecks	=	71,3577	
32ecks	=	81,2254	
36ecks	=	102,8604	
40ecks	=	127,0620	

Beispiel. Wie viel beträgt der Flächeninhalt eines regulären Zwölfecks, dessen Seite = 2 m. ist?

Quadrat der Seite = 2 × 2 = 4 □m.
Inhalt des Zwölfecks = 4 × 11,1961 = 44,7844 □m.
= 44 □m. 78 □dm. 44 □cm.

Uebungsaufgaben.

Gegeben:		Gesucht:
Reguläres.	Seite.	Inhalt.
126. 5eck.	10 cm.	172,05 □cm.
127. 6eck.	10 „	259,80 „
128. 8eck.	10 „	482,84 „
129. 10eck.	10 „	769,42 „
130. 12eck.	10 „	1119,61 „

3. Um aus dem Flächeninhalte eines regulären Polygons die Seite desselben zu berechnen, dividire man diesen Inhalt

durch die entsprechende Verhältnißzahl (in der obigen Tabelle) und ziehe aus dem erhaltenen Quotienten die Quadratwurzel.

Beispiel. Ein Tischler will eine reguläre achteckige Tischplatte, von 12 □m. anfertigen, welche Länge hat er der Seite zu geben?

Wird der Inhalt durch 4,8284 dividirt, so erhält man das Quadrat der Achtecksseite. Demgemäß ist die gesuchte

$$\text{Seite selbst} = \sqrt{\frac{12,0000}{4,8284}} = \sqrt{\frac{30000}{12071}} = 1,5765 \text{ m.}$$

Uebungsaufgaben.

	Gegeben:		Gesucht:
	Reguläres.	Inhalt.	Seite.
131.	5eck	10 □m.	2,4108 m.
132.	6eck	10 "	1,9619 "
133.	8eck	10 "	1,4391 "
134.	10eck	10 "	1,1400 "
135.	12eck	10 "	0,9450 "

4. Auch aus dem Radius (Halbmesser) eines Kreises, in welchen ein reguläres Polygon einbeschrieben worden ist, läßt sich die Seite und der Flächeninhalt dieses Polygons berechnen. Bezeichnet nämlich r den Radius des vorerwähnten Kreises, also r^2 das Quadrat dieses Radius, so findet sich, wie nachstehende Tabelle angiebt:

Reguläres	Die Seite.	der Flächeninhalt.
5eck	1,1756 . r	2,3776 . r^2
6eck	1,0000 . r	2,5981 . r^2
7eck	0,8678 . r	2,7364 . r^2
8eck	0,7654 . r	2,8284 . r^2
9eck	0,6840 . r	2,8925 . r^2
10eck	0,6180 . r	2,9389 . r^2
11eck	0,5631 . r	2,9735 . r^2
12eck	0,5176 . r	3,0000 . r^2
13eck	0,4786 . r	3,0207 . r^2
14eck	0,4450 . r	3,0372 . r^2
15eck	0,4158 . r	3,0505 . r^2
16eck	0,3902 . r	3,0615 . r^2

Reguläres	Die Seite.	der Flächeninhalt.
17eck	0,3675 . r	3,0706 . r^2
18eck	0,3473 . r	3,0782 . r^2
19eck	0,3292 . r	3,0847 . r^2
20eck	0,3129 . r	3,0902 . r^2
24eck	0,2611 . r	3,1058 . r^2
25eck	0,2507 . r	3,1086 . r^2
30eck	0,2091 . r	3,1187 . r^2
32eck	0,1960 . r	3,1214 . r^2
36eck	0,1743 . r	3,1257 . r^2
40eck	0,1569 . r	3,1287 . r^2

Beispiel. In einem Kreis, dessen Radius 10 cm. beträgt, ist ein reguläres Zwanzigeck einbeschrieben worden. Man soll die Seite und den Flächeninhalt des Polygons berechnen.

Die Seite beträgt 10 . 0,3129 = 3,129 cm.

Der Flächeninhalt des 20ecks beträgt 100 . 3,0902 = 309,02 □cm.

Uebungsaufgaben.

Gegeben:		Gesucht:	
Reguläres	Radius r.	Seite.	Flächeninhalt.
136. Fünfeck	2 m.	2,3512 m.	9,5104 □m.
137. Sechseck	2 „	2,0000 „	10,3924 „
138. Achteck	2 „	1,5308 „	11,3196 „
139. Zehneck	2 „	1,2360 „	11,7556 „
140. Zwölfeck	2 „	1,0352 „	12,2000 „

Mit Hülfe der vorstehenden Tabelle kann sowohl aus der Seite als auch aus dem Flächeninhalte eines regulären Polygons der Radius des um dasselbe beschriebenen Kreises berechnet werden.

Der Radius des umbeschriebenen Kreises ergiebt sich nämlich,

a) wenn man die Maßzahl der Seite durch die entsprechende Verhältnißzahl (in der zweiten Colonne obiger Tafel) dividirt;

b) wenn man die Maßzahl des Flächeninhalts des Polygons durch die entsprechende Verhältnißzahl (in der dritten Colonne obiger Tafel) dividirt und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zieht.

Erstes Beispiel. Die Seite eines regulären Funfzehnecks ist 2 m. lang. Wie viel beträgt der Radius desjenigen Kreises, der sich durch alle Eckpunkte dieses Funfzehnecks legen läßt?

Der gesuchte Radius ist $= \frac{2}{0,4158} = \frac{20000}{4158} = 4,81$ m.

Zweites Beispiel. Wie viel beträgt der Radius desjenigen Kreises, in welchen sich ein reguläres Fünfeck von 10 □m. Inhalt einbeschreiben läßt?

Das Quadrat des Radius ist $= \frac{10}{2,3776} = \frac{100000}{23776}$ □m., mithin der gesuchte Radius $= \sqrt{\frac{100000}{23776}}$ $= 2,0508$ m.

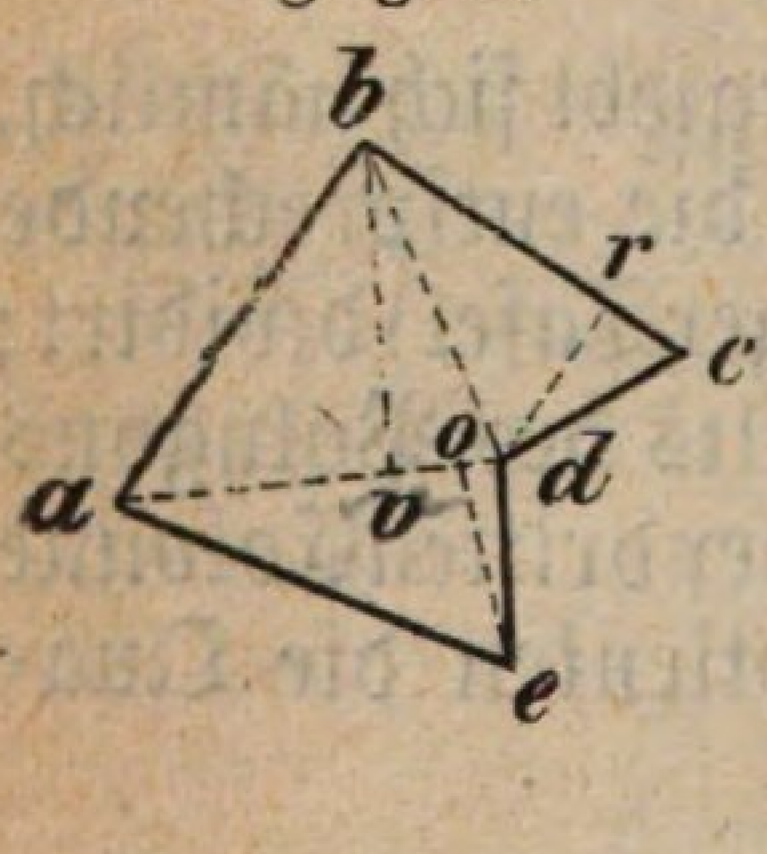
Uebungsaufgaben.

Reguläres	Gegeben: Seite.	Inhalt.	Gesucht: Radius r.
141. Achteck	1 m.		1,3065 m.
142. Neuneck	1 "		1,4619 "
143. Zehneck	1 "		1,6181 "
144. Zwölfeck		8 □m.	1,6330 "
145. 16eck		8 "	1,6168 "
146. 20eck		8 "	1,6089 "
147. 30eck		8 "	1,6016 "

§ 12.

Die unregelmäßigen Vielecke.

Fig. 5.



Ein unregelmäßiges Vieleck hat, gleichviel ob seine Seiten gleich oder ungleich sind, stets ungleiche Winkel. Zur Berechnung eines solchen Vielecks ist erforderlich, daß man dasselbe durch Diagonalen von einem Punkte aus (Fig. 5) in Dreiecke zerlege, den Inhalt derselben einzeln berechne und die gefundenen Resultate zuletzt summire.

Beispiel. Wie groß ist ein Feld von der Form der Fig. 5, wenn die Linien ad = 182 m., bv = 120 m., eo = 60 m., bc = 100 m. und dr = 80 m. sind?

$$\text{Dreieck abd} = \frac{182 \times 120}{2} = 182 \times 60 = 10920 \,\square\text{m.}$$

$$\text{Dreieck ade} = \frac{182 \times 60}{2} = 182 \times 30 = 5460 \,\text{„}$$

$$\text{Dreieck bcd} = \frac{100 \times 80}{2} = 100 \times 40 = 4000 \,\text{„}$$

Größe des obigen Feldes 20380 □m.
= 2 Ha. 3 a. 80 □m.

Uebungsaufgaben.

	Gegeben:					Gesucht:
	ad	bv	eo	bc	dr	Flächeninh.
148.	80 m.	50 m.	30 m.	60 m.	40 m.	44 a.
149.	70 „	60 „	40 „	28 „	15 „	37,1 a.
150.	70 „	40 „	20 „	50 „	16 „	31 a.

Anmerk. Die oben erwähnte Zerlegung des Vielecks mittels der Diagonalen ist nicht immer die zweckmäßigste; die besondere Beschaffenheit der Figur gestattet vielmehr oft ein vortheilhafteres Verfahren, welches darin besteht, daß man das vorliegende Vieleck nicht nur in Dreiecke, sondern auch in Parallelogramme und Paralleltrapeze zerlegt. Es ist nämlich von Wichtigkeit, das Vieleck in möglichst wenig Theile zu zerlegen, wodurch allein bei gehöriger Vorsicht der gesuchte Flächeninhalt ziemlich genau gefunden werden kann.

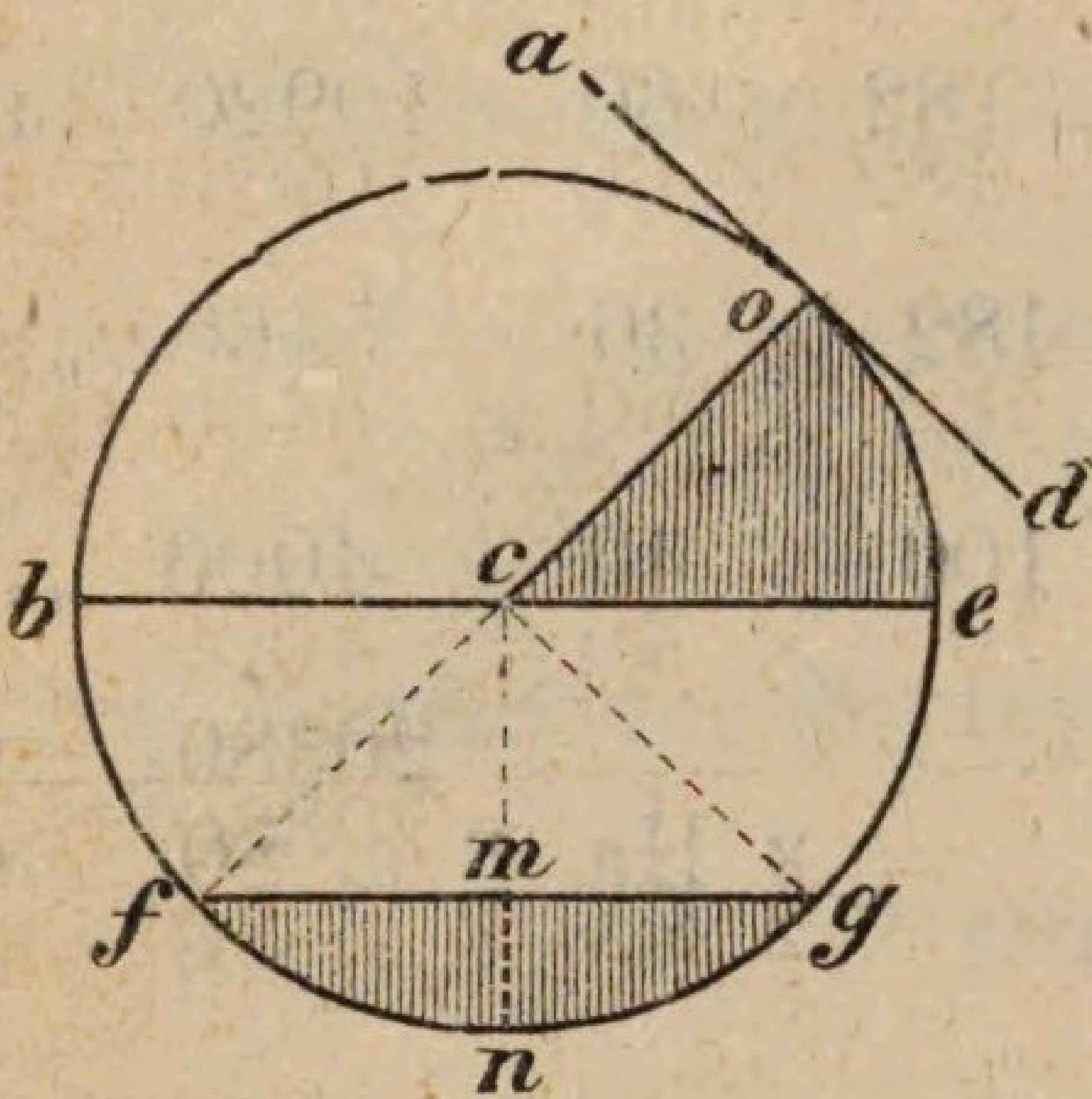
§ 13.

Der Kreis.

1. Die Kreisfläche wird von einer einzigen krummen Linie, der Kreislinie oder Peripherie (Umfang), eingeschlossen, welche überall von einem innerhalb der Fläche befindlichen Punkte, dem Mittelpunkte oder Centrum, gleich weit entfernt bleibt. Jede gerade Linie c o, welche den Mittelpunkt mit einem Punkte der Peripherie verbindet, heißt Halbmesser oder Radius (Strahl). Der Durchmesser b e, aus zwei in einer geraden Linie liegenden Halbmessern bestehend, geht durch

den Mittelpunkt des Kreises und verbindet zwei einander entgegengesetzte Punkte der Peripherie. Die Kreisfläche wird durch den Durchmesser in zwei Halbkreise getheilt; dieselbe Theilung geschieht alsdann auch mit der Kreislinie. Wird von der Peripherie bis wieder zur Peripherie, jedoch nicht durch den Kreismittelpunkt hindurch, eine gerade Linie fg gezogen, so heißt dieselbe eine Sehne, welche stets kleiner ist als der Durchmesser desselben Kreises. Jede gerade Linie a d außerhalb des Kreises, welche nur einen Punkt o der Peripherie berührt, wird eine Tangente (Berührungslinie) genannt. Der Halbmesser, der nach dem Berührungspunkte der Tangente gezogen wird, steht senkrecht auf derselben. Unter einem Kreisausschnitt (Sektor) c o e versteht man denjenigen Theil der Kreisfläche, welcher von zwei Halbmessern und einem Bogen (Theil des Kreisumfangs) begrenzt wird. Ein Kreisabschnitt (Segment) f g n wird von einer Sehne und einem Bogen eingeschlossen.

Fig. 6.



2) Multiplicirt man den Durchmesser eines Kreises mit 3,14159 (d. i. annähernd $^{22}/_{7}$), so findet sich die Länge der Peripherie. Die Zahl 3,14159 wird allgemein mit π (pi) bezeichnet.

Soll aus der Peripherie der Durchmesser berechnet werden, so hat man die Peripherie durch die Zahl π zu dividiren, oder was dasselbe ist, mit 0,31831 (d. i. annähernd $^{7}/_{22}$) zu multipliciren.

Der Inhalt der Kreisfläche wird gefunden,

a) wenn man das Quadrat des Radius mit 3,14159 (annähernd $^{22}/_{7}$) multiplicirt, oder

b) wenn man das Quadrat des Durchmessers mit $\frac{\pi}{4}$ = 0,78539 (d i. annähernd $^{11}/_{14}$) multiplicirt, oder

c) wenn man das Quadrat der Peripherie-Länge mit $\frac{1}{4\pi}$ = 0,079577 (d. i. annähernd $^{7}/_{88}$) multiplicirt.

Erstes Beispiel. Ein Kreis hat 7 m. Durchmesser; wie groß ist die Peripherie und der Flächeninhalt dieses Kreises?

Annähernde Berechnung.

Peripherie $= {}^{22}/_{7} \times 7 = 22$ m.

Inhalt $= {}^{11}/_{14} \times 7 \times 7 = \frac{11 \times 7}{2} = {}^{77}/_{2} = 38^{1}/_{2}$ □m.

Genauere Berechnung.

Peripherie $= 3{,}14159 \times 7 = 21{,}99113$ m.

Inhalt $= 3{,}14159 \times {}^{7}/_{2} \times {}^{7}/_{2} = 38{,}48447$ □m.

Zweites Beispiel. Der Umfang eines Kreises beträgt 44 m.; wie groß ist der Durchmesser und der Flächeninhalt dieses Kreises?

Annähernde Berechnung.

Durchmesser $= {}^{7}/_{22} \times 44 = 7 \times 2 = 14$ m.

Flächeninhalt $= {}^{7}/_{88} \times 44 \times 44 = 7 \times 22 = 154$ □m. oder $14 \times 14 \times {}^{11}/_{14} = 14 \times 11 = 154$ □m.

Genauere Berechnung.

Durchmesser $= 44 \times 0{,}31831 = 14{,}00564$ m.

Flächeninhalt $= 0{,}079577 \times 44 \times 44 = 154{,}061072$ □m.

Uebungsaufgaben.

$\pi = {}^{22}/_{7}$.

Gegeben:		Gesucht:	
Durchmesser.	Radius.	Peripherie.	Flächeninhalt.
151. 21 cm.		66 cm.	$346^{1}/_{2}$ □cm.
152. 28 „		88 „	316 „
153.	21 cm.	132 „	1386 „
154.	6,3 „	39,6 „	124,74 „

Gegeben:	Gesucht:		
Peripherie.	Durchmesser.	Radius.	Flächeninhalt.
155. 11 m.	$3^{1}/_{2}$ m.	$1^{3}/_{4}$ m.	$9^{5}/_{8}$ □m.
156. 55 „	$17^{1}/_{2}$ „	$8^{3}/_{4}$ „	$240^{5}/_{8}$ „
157. 77 „	$24^{1}/_{2}$ „	$12^{1}/_{4}$ „	$471^{5}/_{8}$ „
158. 33 „	$10^{1}/_{2}$ „	$5^{1}/_{4}$ „	$86^{5}/_{8}$ „

$\pi = 3,14159.$

Gegeben: Radius.	Gesucht: Peripherie.	Flächeninhalt.
159. 1 m.	6,28318 m.	3,14159 □m.
160. 2 "	12,56636 "	12,56636 "
161. 3 "	18,84954 "	28,27431 "
162. 4 "	25,13272 "	50,26544 "

Gegeben: Peripherie.	Gesucht: Radius.	Flächeninhalt.
163. 8 m.	1,27326 m.	5,0930 □m.
164. 9 "	1,43242 "	6,4459 "
165. 10 "	1,59157 "	7,9588 "

3) Ist der Inhalt eines Kreises gegeben und soll hieraus der Radius berechnet werden, so dividire man den gegebenen Inhalt durch die Zahl π und ziehe aus dem erhaltenen Quotienten die Quadratwurzel. Genügt ein annäherndes Resultat, so kann man den gegebenen Inhalt mit $^7/_{22}$ multipliciren und aus dem gefundenen Produkte die Quadratwurzel ziehen.

Wird aber der Flächeninhalt des Kreises mit $4\,\pi = 12,56636$ (d. i. annähernd $^{88}/_7$) multiplicirt und alsdann aus dem Producte die Quadratwurzel gezogen, so ergiebt sich die Peripherie.

Beispiel. Man soll den Durchmesser und die Peripherie eines Kreises von $346^1/_2$ □cm. Inhalt berechnen.

Annähernde Berechnung.

Wird der Inhalt durch $^{22}/_7$ dividirt, so ergiebt sich das Quadrat des Radius $= \frac{693 \times 7}{2 \times 22} = \frac{63 \times 7}{2 \times 2} = \frac{9 \times 49}{4}$ □cm. Demgemäß ist der Radius $= \sqrt{\frac{9 \times 49}{4}} = \frac{3 \times 7}{2} = {}^{21}/_2 = 10^1/_2$ cm., mithin der gesuchte Durchmesser $= 2 \times 10^1/_2 = 21$ cm.

Wird der Inhalt mit $^{88}/_7$ multiplicirt so findet sich das Quadrat der Peripherie $= \frac{693 \times 88}{2 \times 7} = 99 \times 44 = 11$

$\times 11 \times 9 \times 4 = 11^2 \times 6^2$ □cm.; mithin die Peripherie selbst $= \sqrt{11^2 \times 6^2} = 11 \times 6 = 66$ cm.

Genauere Berechnung.

$$\text{Radius} = \sqrt{\frac{346{,}50000}{3{,}14159}} = 10{,}5021 \text{ cm.}$$

Durchmesser $= 2 \times 10{,}5021 = 21{,}0042$ cm.

Peripherie $= \sqrt{346^1/_2 \times 4\pi} = \sqrt{1386\ .\ 3{,}14159} =$ 74,0383 cm.

Uebungsaufgaben. In einem Kreise ist

Gegeben: Flächeninhalt.	Gesucht: Radius.	Peripheri.
166. $38^1/_2$ □cm.	$3^1/_2$ od. 3,5007 cm.	22 od. 21,9956 cm.
167. $962^1/_2$ „	$17^1/_2$ „ 17,5035 „	110 „ 109,9778 „
168. $1886^1/_2$ „	$24^1/_2$ „ 24,5049 „	154 „ 153,9689 „
169. $3118^1/_2$ „	$31^1/_2$ „ 31,5063 „	198 „ 197,9602 „
170. $4658^7/_2$ „	$38^1/_2$ „ 38,5077 „	242 „ 241,9513 „

4. Der Winkel e c o (Fig. 6), welcher mit seinem Scheitel c im Mittelpunkte des Kreises liegt und zwei Halbmesser zu Schenkeln hat, heißt Mittelpunkts- oder Centriwinkel. Die Größe dieses Winkels hängt von der Größe des Bogens e o ab, auf welchem derselbe ruht oder den er umspannt. Da die ganze Peripherie eines Kreises in 360 gleiche Theile, Grade genannt, getheilt wird, so ist die Anzahl der Grade des Bogens e o zugleich diejenige der Grade des Winkels e c o, und läßt sich daher auch angeben, in welchem Verhältniß der Bogen des Winkels zur ganzen Peripherie steht. Hieraus folgt, daß die Länge eines in Graden angegebenen Bogens nach Meter, Centimeter u. s. w. leicht bestimmt werden kann, sobald nur der Durchmesser des zugehörigen Kreises in Meter, Centimeter ꝛc. ausgedrückt ist.

Beispiel. Wie lang ist ein Bogen von 30 Grad (z. B. Bogen e o in Fig. 6), wenn der Durchmesser des zugehörigen Kreises 28 cm. beträgt?

Annähernde Berechnung.

Die ganze Peripherie hat hat 360 Grad; demnach ist der 30 Grad messende Bogen der zwölfte Theil der Peripherie. Da der Durchmesser 28 cm. beträgt, so hat die Peripherie eine Länge von $28 \times {}^{22}/_{7} = 4 \times 22 = 88$ cm. Der erwähnte Kreisbogen, als der zwölfte Theil der Peripherie, beträgt mithin ${}^{88}/_{12} = {}^{22}/_{3} = 7\,{}^{1}/_{3}$ cm.

Genauere Berechnung.

Die ganze Peripherie hat eine Länge von $28 \times 3{,}14159 = 87{,}96452$ cm. Es kommen also

auf

360 Grad 87,96452 cm.

$1 \;„\; \frac{87{,}69452}{360}$ „

$30 \;„\; \frac{30 \times 87{,}96452}{360} = \frac{87{,}96452}{12} = \frac{21{,}99113}{3} =$ 7,33037 cm.

Anmerk. Wird der Bogen eines Centriwinkels = n Grad, der Radius des zugehörigen Kreises = r Meter gesetzt, so ist die Länge des erwähnten Bogens =

$$\frac{r \,.\, \pi \,.\, n}{180} \text{ Meter.}$$

Uebungsaufgaben. Von einem Centriwinkel sind

Gegeben:			Gesucht:			
	Winkelgröße.	Radius.	Bogenlänge.			
171.	45 Grad	10 cm.	$7\,{}^{6}/_{7}$	oder	7,853975	cm.
172.	72 „	20 „	$25\,{}^{1}/_{7}$	„	25,13272	„
173.	36 „	30 „	$18\,{}^{6}/_{7}$	„	18,84954	„
174.	108 „	40 „	$75\,{}^{3}/_{7}$	„	75,39816	„
175.	160 „	45 „	$125\,{}^{5}/_{7}$	„	125,6636	„

5. Ebenso kann ein in geradlinigem Längenmaße ausgedrückter Kreisbogen nach Graden bestimmt werden, wenn der Durchmesser, resp. der Radius des zugehörigen Kreises bekannt ist.

Beispiel. In einem Kreise von 24 cm. Durchmesser hat der Bogen eines Centriwinkels $14\,{}^{2}/_{3}$ cm. Länge. Wie viel Grad zählt dieser Winkel (oder dieser Bogen)?

Annähernde Berechnung.

Die Peripherie ist $= \frac{22}{7} \times 28 = 22 \times 4 = 88$ cm., während der erwähnte Bogen $14\frac{2}{3}$ cm. Länge hat. Diese Bogenlänge ist in der Peripherie $\frac{88}{14\frac{2}{3}} = \frac{88 \times 3}{44} = 2 \times 3$ $= 6$mal enthalten. Mithin ist der entsprechende Centriwinkel gleich dem 6. Theil von 360 Grad, d. i. $= 60$ Grad.

Genauere Berechnung.

Peripherie $= 22 \times 3{,}14159 = 87{,}96452$ cm. Mithin kommen

87,96452 cm. auf 360 Grad

$$1 \;\text{„}\; \text{„}\; \frac{360}{87{,}96452}\text{„}$$

$$14\frac{2}{3}\;\text{„}\; \text{„}\; \frac{14\frac{2}{3} \times 360}{87{,}96452} = \frac{44 \times 120}{87{,}96452} = \frac{5280}{87{,}96452}$$

$$= \frac{528000000}{8796452} = 60{,}0242 \text{ Grad} = 60^0\; 1'\; 15''\; 7'''.$$

Anmerk. Wird das Metermaß des Radius mit r, das des Bogens mit b bezeichnet, so beträgt der zu diesem Bogen gehörige Centriwinkel $\frac{b \cdot 180}{r\,\pi}$ Grad.

Uebungsaufgaben.

	Gegeben: Radius.	Bogenlänge.	Gesucht: Centriwinkel.		
176.	20 cm.	20 cm.	$57\frac{3}{11}$	oder	57,29576 Grad.
177.	30 „	30 „	$57\frac{3}{11}$	„	57,29576 „
178.	35 „	70 „	$114\frac{6}{11}$	„	114,5915 „
179.	22 „	44 „	$114\frac{6}{11}$	„	114,5915 „
180.	14 „	22 „	90	„	96,0362 „

6. Ist ein Kreisbogen gleichzeitig in Graden und im Metermaß angegeben, so läßt sich hieraus der Radius, resp. der Durchmesser des zugehörigen Kreises berechnen.

Beispiel. Ein Centriwinkel von 48 Grad steht auf einem Bogen von $8\frac{4}{5}$ m. Länge. Wie groß ist der Radius, resp. der Durchmesser des zugehörigen Kreises?

Annähernde Berechnung.

Zu 360 Grad gehört die ganze Peripherie.
" 1 " " $^1/_{360}$ der "
" 48 " " $^{48}/_{360}$ oder $^2/_{15}$ der Peripherie.
Es sind also
$^2/_{15}$ der Peripherie $= 8^4/_5$ Meter,
$^1/_{15}$ " " $= 4^2/_5$ "
mithin ist die ganze Peripherie $= 15 \times 4^2/_5 = 66$ Meter. Diese Länge durch $^{22}/_7$ dividirt, ergiebt den Durchmesser $= \frac{66 \times 7}{22} = 3 \times 7 = 21$ m., so daß der Radius $^{21}/_2 = 10^1/_2$ Meter beträgt.

Genauere Berechnung.

Zu 48 Grad gehören $^{48}/_{360} = ^2/_{15}$ der Peripherie. Da $^2/_{15}$ der Peripherie $= 8^4/_5$ m. sind, so beträgt die ganze Peripherie $^{15}/_2 \times 8^4/_5 = 3 \times 22 = 66$ m., mithin der Durchmesser $= \frac{66}{\pi} = \frac{66}{3{,}14159} = 21{,}0084$ m., der Radius $= \frac{33}{\pi} = \frac{33}{3{,}14159} = 10{,}5042$ m.

Anmerk. Ist der Centriwinkel = n Grad, seine Bogenlänge = b Meter gegeben, so findet sich der Radius des zugehörigen Kreises = $\frac{b \cdot 180}{n \cdot \pi}$ Meter.

Uebungsaufgaben.

Gegeben: Centriwinkel.	Bogenlänge.	Gesucht: Radius.
181. 30 Grad.	11 cm.	21 oder 21,0084 cm.
182. 60 "	22 "	21 " 21,0084 "
183. 90 "	17,6 "	$11^1/_5$ " 11,2045 "
184. 45 "	28,6 "	$36^2/_5$ " 46,4146 "
185. 75 "	13,2 "	10,08 " 10,084 "

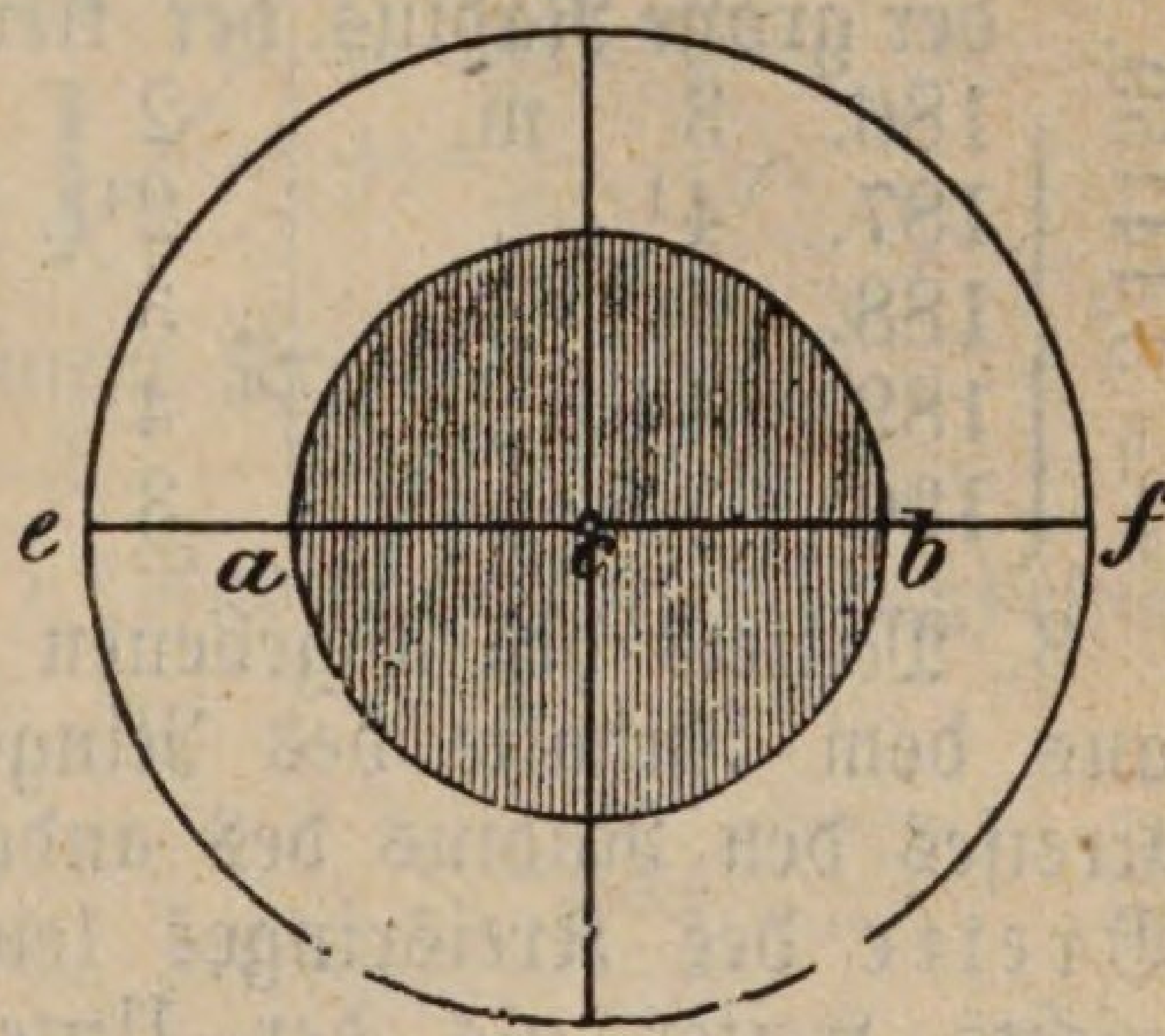
§ 14.

Der Kreisring.

1. Wenn ein Kreis mit seiner ganzen Fläche in einem andern Kreise liegt, so heißt das von den beiden Peripherien

eingeschlossene Flächenstück ein Kreisring. Die beiden Kreise sind concentrisch, wenn sie einen gemeinschaftlichen Mittelpunkt haben (Fig. 5). Excentrische Kreise haben keinen gemeinsamen Mittelpunkt. Gewöhnlich denkt man sich einen Kreisring von zwei concentrischen Kreislinien begrenzt.

Fig. 7.



2. Der Flächeninhalt eines Kreisringes wird gefunden, wenn man den Inhalt des kleinern Kreises von dem des größern abzieht. Dies geschieht auf kürzerem Wege dadurch, daß man das Produkt aus der Summe und dem Unterschiede der beiden Radien c e und c a (Fig. 7) mit π (annähernd $^{22}/_{7}$) multiplicirt.

Beispiel. Wie viel beträgt der Flächeninhalt eines Kreisringes, wenn der Radius des größeren Kreises = 7 cm. der des kleineren hingegen = $3^1/_2$ cm. gegeben ist?

Erste Berechnung.

Inhalt des größeren Kreises $= 7 \times 7 \times {}^{22}/_{7} = 7 \times 22 = 154$ $\square$cm.

Inhalt des kleineren Kreises $= 3^1/_2 \times 3^1/_2 \times {}^{22}/_{7} = \dfrac{7 \times 11}{2} = 38^1/_2$ $\square$cm.;

also die Größe des Kreisringes $= 154 - 38^1/_2 = 115^1/_2$ $\square$cm.

Zweite Berechnung.

Summe der beiden Radien $= 7 + 3^1/_2 = 10^1/_2$ cm.

Unterschied „ „ „ $= 7 - 3^1/_2 = 3^1/_2$ „

Inhalt des Kreisringes $= 10^1/_2 \times 3^1/_2 \times {}^{22}/_{7} = \dfrac{51 \times 11}{2}$

$= 115^1/_2$ $\square$cm., oder wenn $\pi = 3{,}14159$ gesetzt wird,
$= 10^1/_2 \times 3^1/_2 \times 3{,}14157 = 10{,}5 \;.\; 3{,}5 \;.\; 3{,}14159$
$= 115{,}4535$ $\square$cm.

Uebungsaufgaben. In einem Kreisringe ist

	Gegeben:		Gesucht:
	der große Radius.	der kleinere Radius.	der Flächeninhalt.
$\pi = 3{,}14159$. 186.	3 m.	2 m.	15,7079 □m.
187.	$4^1/_2$ "	$2^1/_2$ "	43,9822 "
188.	4 "	3 "	21,9911 "
189.	4,5 "	4 "	13,3518 "
190.	3,5 "	3 "	10,2102 "

3. Mittels des angebenen kürzeren Verfahrens kann man aus dem Inhalte des Ringes und dem Radius des einen Kreises den Radius des andern Kreises und somit auch die Breite des Kreisringes leicht berechnen. Diese Breite ist nichts weiter als der Unterschied der beiden Radien des Kreisringes.

Beispiel. Wie breit ist ein Kreisring von $115^1/_2$ □cm. Inhalt, wenn der Radius des größeren Kreises 7 cm. beträgt?

Erste Berechnung.

Der Inhalt des Kreisringes durch $^{22}/_7$ dividirt, ergiebt den Unterschied der Quadrate der beiden Radien $= 115^1/_2 \times {}^7/_{22} = 5^1/_4 \times 7 = 36^3/_4$ □cm. Da nun das Quadrat des größeren Radius $= 7 \times 7 = 49$ □cm. ist, so beträgt das Quadrat des kleineren Radius $49 - 36^3/_4 = 12^1/_4$ □cm. mithin der kleinere Radius selbst $\sqrt{12^1/_4} = \sqrt{^{49}/_4} = {}^7/_2 = 3^1/_2$ cm. Demgemäß ist die Breite des Kreisringes $= 7 - 3^1/_2 = 3^1/_2$ cm.

Zweite Berechnung.

Unterschied der Quadrate der beiden Radien $= \frac{115{,}50000}{3{,}14159}$ $= 36{,}7648$ □cm.

Quadrat des kleineren Radius $= 49 - 36{,}7648 = 12{,}2352$ □cm.

Mithin der kleinere Radius $= \sqrt{12{,}2352} = 3{,}4978$ cm., also die Breite des Kreisringes $= 7 - 3{,}4978 = 3{,}5022$ cm.

Anmerk. Bezeichnet man den Flächeninhalt des Kreisringes mit F, den Radius des größten Kreises mit r, den Radius des kleineren Kreises mit ρ (sprich rho), so ist

$$F = (r^2 - \rho^2)\,\pi \text{ oder } F = (r + \rho) \cdot (r - \rho) \cdot \pi;$$

ferner die Breite des Kreisringes =

$$\sqrt{r^2 - \frac{F}{\pi}} \text{ oder } \sqrt{\rho^2 + \frac{F}{\pi}} - \rho.$$

Uebungsaufgaben. In einem Kreisringe ist

	Gegeben: Flächeninhalt.	Radius r	Radius ρ	Gesucht: Brt. d. Kreisring.
$\pi = {}^{22}/_{7}$.	191. 462 □cm.	14 cm.		7 cm.
	192. 550 "	16 "		7 "
	193. 4136 "	54 "		14 "
	194. 4224 "		36 cm.	14 "
	195. 10494 "		69 "	21 "

§ 15.

Der Kreisausschnitt (Sector).

1. Dem Flächeninhalte nach ist der Kreisausschnitt (c e o in Fig. 6) gleich einem Dreieck, das den Bogen (e o) des ersteren zur Grundlinie und den Radius des Kreises zur Höhe hat. Demnach ist der Inhalt des Sectors gleich der Hälfte des Produkts aus Bogen und Radius.

Anmerk. Wird der Flächeninhalt des Kreis-Sectors mit S bezeichnet und außerdem die in § 13 Nr. 4, 5 und 6 angegebene Bedeutung der Buchstaben r, b und n festgehalten, so findet sich allgemein:

$$S = \frac{r\,b}{2} \qquad b = \frac{2\,S}{r} \qquad r = \frac{2\,S}{b}$$

$$S = \frac{r^2\,\pi\,.\,n.}{360} \qquad b = \sqrt{\frac{S\,.\,n\,.\,\pi}{90}} \qquad r = \sqrt{\frac{S\,.\,360}{n\,.\,\pi}}$$

$$S = \frac{b^2\,.\,90}{n\,.\,\pi} \qquad b = \frac{r\,.\,\pi\,.\,n}{180} \qquad r = \frac{b\,.\,180}{n\,.\,\pi}$$

$$n = \frac{S\,.\,360}{r^2\,.\,\pi}$$

$$n = \frac{b^2\,.\,90}{S\,.\,\pi}$$

$$n = \frac{b\,.\,180}{r\,.\,\pi}$$

Erstes Beispiel. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Kreis-Sectors, wenn der Bogen desselben 6 cm. und der Radius des zugehörigen Kreises 14 cm. beträgt?

Das halbe Produkt aus Radius und Bogenlänge beträgt $\frac{6 \times 14}{2} = 6 \times 7 = 42$; mithin enthält der erwähnte Kreis-Sector 42 □cm.

Zweites Beispiel. Der Centriwinkel eines Sectors hat 60 Grad, während der Durchmesser des zugehörigen Kreises = 14 cm. ist. Wie groß ist hiernach der Inhalt des Sectors?

Es ist die ganze Peripherie $= 14 \times {}^{22}/_{7} = 2 \times 22 =$ 44 cm., folglich der 60 Grad messende Bogen, welcher ${}^{60}/_{360}$ oder ${}^{1}/_{6}$ der Peripherie beträgt, gleich dem 6. Theil von 44 cm., d. i. $= {}^{44}/_{6} = {}^{22}/_{3}$ cm. Da nun der Radius des Kreises ${}^{14}/_{2} = 7$ cm. beträgt, so ist der Inhalt des obigen Sectors $= {}^{22}/_{3} \times {}^{7}/_{2} = \frac{11 \times 7}{3} = 25{}^{2}/_{3}$ □cm.

Wird statt ${}^{22}/_{7}$ die Zahl 3,14159 angewendet, so ist der Flächeninhalt des Sectors $= {}^{60}/_{360} \times 7^2 \times 3{,}15159$ □cm., d. i. $= {}^{1}/_{6}$ d. Kreisfläche, nämlich $\frac{49 \times 3{,}14159}{6} = 25{,}6563$ □cm.

Drittes Beispiel. Wie viel beträgt der Centriwinkel eines $277{}^{1}/_{5}$ □cm. großen Ausschnitts, wenn der Radius = 21 cm. ist?

Durchmesser = 42 cm.

Peripherie $= 42 \times {}^{22}/_{7} = 6 \times 22 = 132$ cm.

Wird der doppelte Inhalt des Sectors durch den Radius dividirt, so ergiebt sich die Bogenlänge $= \frac{2 \times 277{}^{1}/_{5}}{21} = 2 \times 13{}^{1}/_{5} = 26{}^{2}/_{5}$ cm. Dieselbe ist i. d. Periph. $\frac{132}{26{}^{2}/_{5}} = \frac{132 \times 5}{132} = 5$mal enthalten, woraus folgt, daß der auf dem erwähnten Bogen stehende Centriwinkel ${}^{1}/_{5}$ von 360 Grad, d. i. 72 Grad beträgt.

Man kann aber auch folgendermaßen verfahren. Der Inhalt des Kreises ist $= 21 \times 21 \times {}^{22}/_{7} = 21 \times 3 \times 22$

= 1386 □cm. Da der Inhalt des Sectors hierin $\frac{1368}{277^1/_5}$ oder $\frac{1386 \times 5}{1386}$ = 5mal enthalten ist, so findet sich, daß nicht nur der Sector den 5. Theil der Kreisfläche ausmacht, sondern auch daß der Centriwinkel dieses Sectors den fünften Theil von 360 Grad, d. i. 72 Grad beträgt.

Welche Aenderung erfährt das Resultat, wenn $\pi = 3{,}14159$ (nicht $3^1/_7$) gesetzt wird?

Viertes Beispiel. Der Centriwinkel eines 88 □cm. großen Kreis-Sectors beträgt 70 Grad. Wie groß ist der Radius des Kreises, wenn $\pi = {}^{22}/_7$ genommen wird?

Der Kreis-Sector beträgt $^{70}/_{360}$ oder $^7/_{36}$ der ganzen Kreisfläche. Mithin sind $^7/_{36}$ der Kreisfläche = 88 □cm., $^1/_{36}$ der Kreisfläche = $^{88}/_7$ □cm., also die ganze Kreisfläche = $\frac{36 \times 88}{7}$ □cm. Wird dieser Inhalt durch $^{22}/_7$ dividirt, so findet sich das Quadrat des Radius = $\frac{36 \times 88 \times 7}{7 \times 22} = \frac{36 \times 88}{22} = 36 \times 4$ □cm., folglich der Radius selbst = $\sqrt{36 \times 4} = 6 \times 2 = 12$ cm.

Welches Resultat ergiebt sich, wenn man $\pi = 3{,}14159$ setzt?

Uebungsaufgaben. In einem Kreis-Sector ist

Gegeben:		Gesucht:	
Radius.	Bogenlänge.	Centriwinkel.	Flächeninhalt.
196. 14 cm.	10 cm.	40,9255 Grad	70 cm.
197. 21 „	20 „	54,5674 „	210 „
Radius.	Centriwinkel.	Bogenlänge.	Flächeninhalt.
198. 7 m.	82 °	8,79646 m.	30,78761 □cm.
199. $3^1/_2$ „	135 °	8,24668 „	14,43169 „
Bogenlänge.	Centriwinkel.	Radius.	Flächeninhalt.
200. 10 cm.	60 °	9,5493 cm.	47,7465 □cm.
201. 20 „	45 °	25,4648 „	254,6480 „
Radius.	Flächeninhalt.	Centriwinkel.	Bogenlänge.
202. 12 cm.	48 □cm.	38,1972 °	8 cm.
203. 20 „	80 „	22,9183 °	8 „

	Gegeben:	Gesucht:	
Centriwinkel.	Flächeninhalt.	Bogenlänge.	Radius.
204. 45 °	50 □cm.	8,86227 cm.	11,2838 cm.
205. 36 °	60 „	8,68321 „	13,8191 „
Bogenlänge.	Flächeninhalt.	Centriwinkel.	Radius.
206. 9 cm.	72 □cm.	32,2289 °	16 cm.
207. 15 „	90 „	71,62	12 „

Anmerk. In vorstehenden Aufgaben ist $\pi = 3,14159$ zu nehmen.

§ 16.

Der Kreisabschnitt oder das Kreis-Segment.

1. Wird im Kreisabschnitt auf der Mitte der Sehne (f g in Fig. 6) eine senkrechte Linie (m n) errichtet, und zwar bis zum Zusammentreffen mit dem begrenzenden Kreisbogen, so ergiebt sich hierdurch die Bogenhöhe (m n) des Kreisabschnitts (f n g). Durch Multiplication der Sehne mit $\frac{2}{3}$ der Bogenhöhe erhält man annähernd den Flächeninhalt des Kreisabschnitts.

Beispiel. Wie groß ist der Inhalt eines Kreisabschnitts (f n g), wenn die Sehne (f g) = 12 cm., die Bogenhöhe (m n) = 4 cm. ist?

Flächeninhalt $= 12 \times 4 \times \frac{2}{3} = 8 \times 4 = 32$ □cm.

Anmerk. Die Bogenhöhe ist einer der beiden Abschnitte, in welche der Durchmesser des Kreises durch die Sehne zerlegt wird. Das Quadrat der halben Sehne ist gleich dem Rechteck aus den soeben erwähnten Abschnitten des Durchmessers. Dividirt man also das Quadrat der halben Sehne durch die gegebene Bogenhöhe, so findet sich der andere Abschnitt des Durchmessers. Demgemäß kann man aus der Sehne und Bogenhöhe eine Kreis-Segments auch den Radius des Kreises berechnen. So ist z. B. in vorstehendem Beispiel das Quadrat der halben Sehne $= \frac{12}{2} \times \frac{12}{2} = 6 \times 6 = 36$ □cm., der andere Abschnitt des Durchmessers $= \frac{36}{4} = 9$ cm., also der Durchmesser selbst $= 4 + 9 = 13$ cm., mithin der Radius des zugehörigen Kreises $= \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}$ cm.

Bezeichnet man die Sehne mit a, die Bogenlänge mit b, so ist die halbe Sehne $= \frac{a}{2}$, das Quadrat der halben Sehne $= \frac{a^2}{4}$, der andere Abschnitt des Durchmessers $= \frac{a^2}{4\,b}$, mithin der Durchmesser des Kreises $= \frac{a^2}{4\,b} + b = \frac{a^2 + 4\,b^2}{4\,b}$, also der Radius $= \frac{a^2 + 4b^2}{8\,b}$.

Uebungsaufgaben. In einem Kreisabschnittt ist

	Gegeben:		Gesucht:
Sehne.	Bogenhöhe.	Radius.	Flächeninhalt.
208. 18 cm.	3 cm.	15 cm.	36 □cm.
209. 20 "	5 "	$12^1/_2$ "	$66^2/_3$ "
210. 24 "	9 "	$12^1/_2$ "	144 "

2. Zur genaueren Berechnung des Flächeninhalts eines Kreisabschnitts ist erforderlich, daß man von dem Flächeninhalte des zugehörigen Kreisausschnitts den Inhalt des auf der Sehne ruhenden gleichschenkligen Dreiecks abzieht. So ist z. B. in Fig. 6, wenn der Keisabschnitt f n g berechnet werden soll, c f n g der zugehörige Kreisausschnitt und c f g das abzuziehende Dreieck. Soll aber der Flächeninhalt des Kreis-Sectors c f n g gefunden werden, so muß man vorher die Größe des Centriwinkels c f g bestimmen. Dieser Winkel läßt sich (trigonometrisch) berechnen; er beträgt

im obigen Beispiel 134° 45′ 37″, d. i. 134 Grad 45 Min. [37 Secunden.
im Aufg. 208. 73° 44′ 23″
" " 209. 106° 15′ 37″
" " 210. 147° 28′ 46″.

Hiernach gestaltet sich die im Beispiel unter Nr. 1 vorgeführte Berechnung des Kreisabschnitts f n g folgendermaßen.

Centriwinkel c f g = 134° 45′ 37″ = $134^{2737}/_{3600}$ oder $^{485137}/_{3600}$ Grad. Radius des Kreises = $6^1/_2$ cm.

Inhalt des Kreis-Sectors c f n g = $\dfrac{6^1/_2 \cdot 6^1/_2 \cdot \pi \cdot {}^{485137}/_{3600}}{360}$

$$= \frac{13 \cdot 13 \cdot 3{,}14159 \cdot 485137}{2 \cdot 2 \cdot 360 \cdot 3600} = 49{,}6838 \ \square\text{cm.}$$

Ferner ist im Dreieck c f g die Grundlinie f g = 12 cm. gegeben, während die Höhe cm. gesucht werden muß. Letztere bildet aber mit dem Radius c f = $6^1/_2$ cm. und der halben Sehne = 6 cm. ein rechtwinkliges Dreieck c f m, dessen unbekannte Kathete c m mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes (§ 8 Nr. 2) gefunden wird. Es ist nämlich die Linie c m. =

$$\sqrt{(6^1/_2)^2 - 6^2} = \sqrt{^{169}/_4 - 36} = \sqrt{\frac{169 - 144}{4}} = \sqrt{^{25}/_4}$$

$= {}^5/_2$ cm.; d. h. die Höhe des Dreiecks c f g beträgt ${}^5/_2$ cm. Demgemäß ist der Inhalt dieses Dreiecks $= \frac{12 \,.\, 5}{2 \,.\, 2} = 3 \,.\, 5$ = 15 □cm. Dieser Inhalt von der Größe des Kreisausschnitts c f n g abgezogen, ergiebt den Inhalt des Kreisabschnitts f n g = 49,6838 — 15 = 34,6838 □cm., während derselbe nach dem kürzeren Verfahren (Beispiel zu Nr. 1) = 32 □cm. gefunden worden ist, so daß im vorliegendem Falle der Unterschied der beiden Resultate 2,6838 □cm. beträgt.

§ 17.

Die Ellipse, das gewöhnliche Langrund und das Oval.

1. Die in der Ueberschrift genannten Flächen haben jede zwei verschiedene Hauptdurchmesser, welche namentlich bei der Ellipse Achsen genannt werden. Diese beiden Hauptdurchmesser halbiren sich gegenseitig, und zwar unter rechten Winkeln. Wenn in der Ellipse (Fig. 8) die Längenachse A B mit einer Zirkelöffnung = der Hälfte derselben (d. i. = A O) aus einem Endpunkte C oder D der Breitenachse C D geschnitten wird, so erhält man die Brennpunkte a und b, welche gleich weit vom Durchschnittspunkte O der beiden Achsen entfernt liegen. Je zwei gerade Linien, von irgend einem Punkte des Umfangs nach den beiden Brennpunkten gezogen, ergeben stets dieselbe Summe. So ist z. B. a c + b c = a d + b d = a C + b C = a e + b e = a f + bf. Hieraus folgt, daß eine Ellipse entsteht, wenn man in a und b Stifte einschlägt, um dieselben einen Faden legt, der bis zum Punkte C hin angespannt werden kann, und alsdann diesen Faden mit einem Zeichenstifte von C aus um die Stifte a und b straff angezogen herumführt.

Fig. 8.

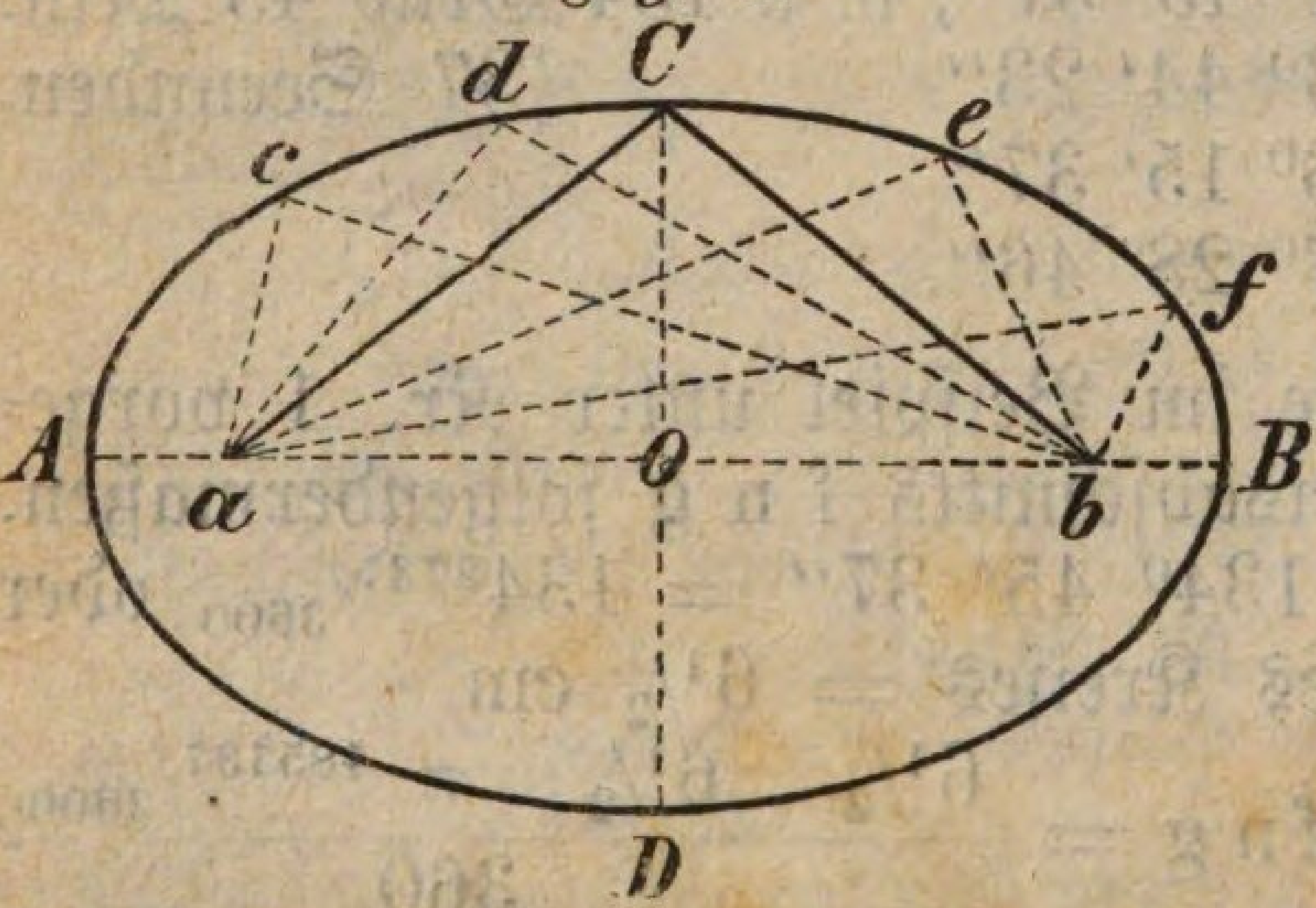


Fig. 9.

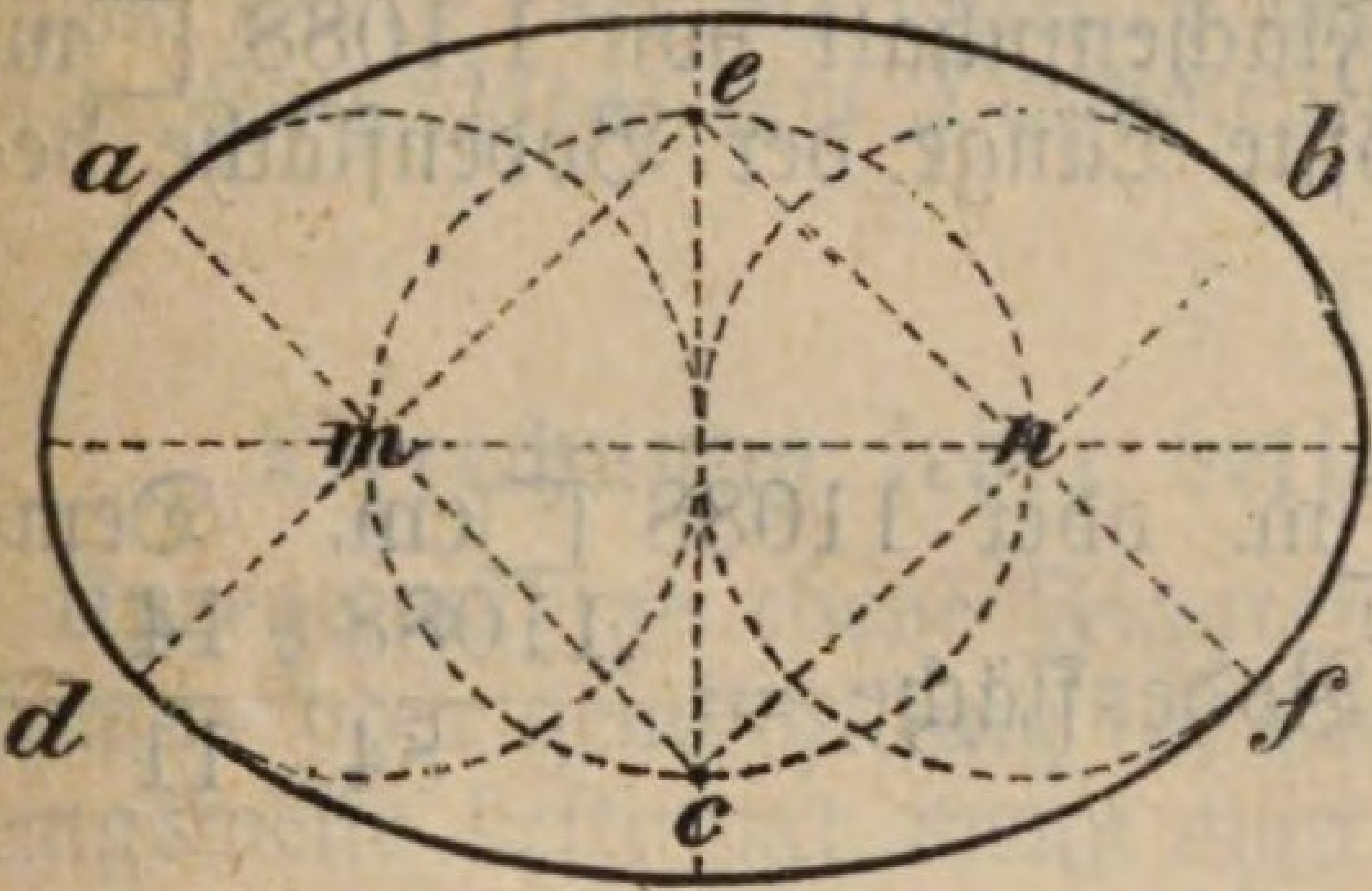
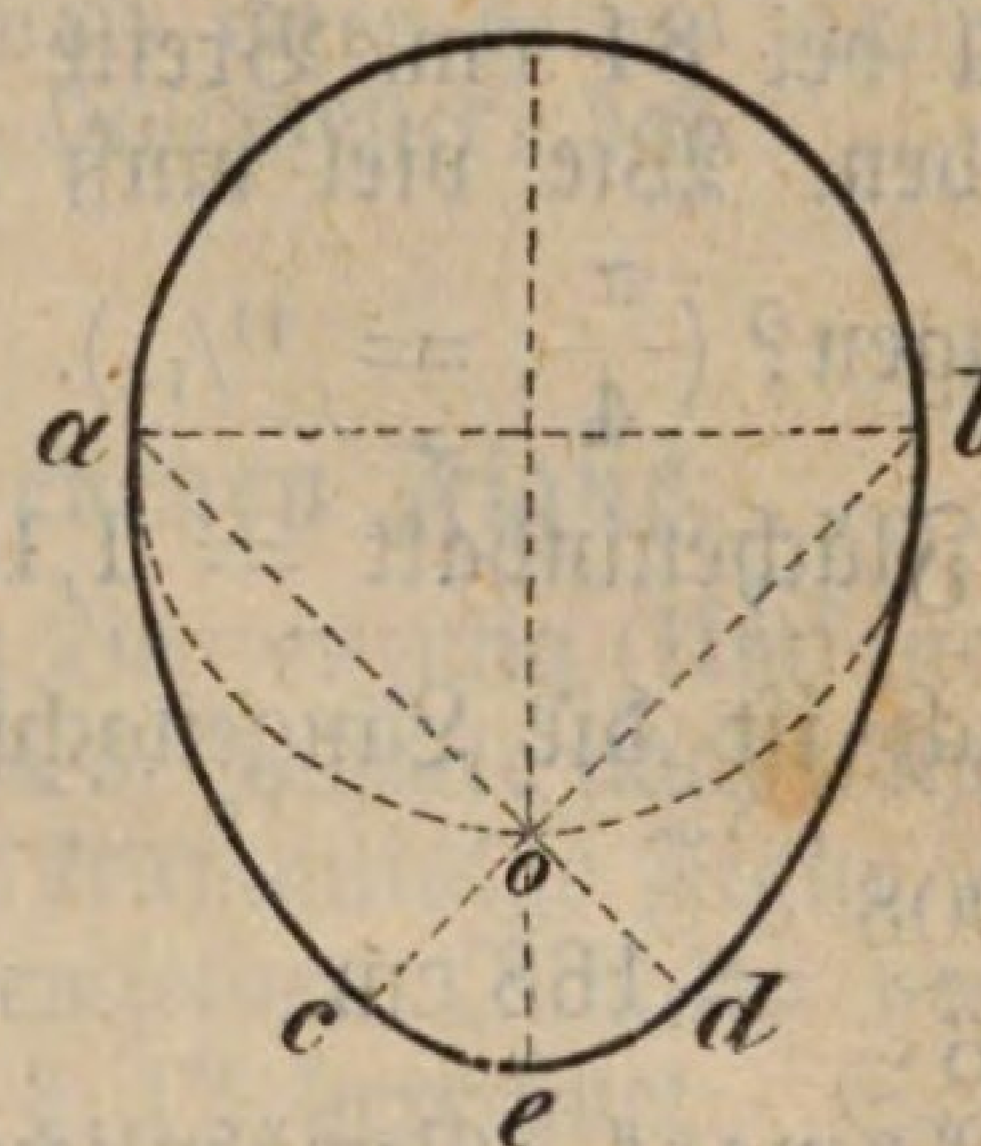


Fig. 10.



Langrunde und Ovale (Fig. 9 und 10) lassen sich mit Hülfe des Zirkels herstellen. So ist z. B. im Langrund (Fig. 9) der Kreisbogen a b mit dem Radius c a von c aus, und der Kreisbogen d f mit dem Radius e d = c a von e aus beschrieben worden. Das Oval in Fig. 10 besteht aus dem Halbkreise über a b, den Kreisbogen a c und b d, jener aus b und dieser aus a mit dem Radius b c = a d = a b beschrieben, und dem Ergänzungsbogen c e d, welcher o c = o e = o d zum Radius und o zum Kreismittelpunkt hat.

Zwei halbe Ellipsen, die verschiedene Längenachsen, aber gleiche Breitenachsen haben, bilden, wenn sie mit ihrer Breitenachse an einander gelegt werden, gleichfalls ein Oval.

2. Der Flächeninhalt einer Ellipse, wie auch derjenige eines Ovals wird gefunden, wenn man das Produkt beider Achsen mit $\frac{\pi}{4} = 0{,}78539$ (annähernd $^{11}/_{14}$), oder wenn man das Produkt der beiden Halbachsen mit π (annähernd $^{22}/_{7}$) multiplicirt. Hieraus folgt zugleich, daß der Flächeninhalt der Ellipse mit $\frac{4}{\pi}$ (annähernd $^{14}/_{11}$) multiplicirt und alsdann durch eine Achse dividirt, die Länge der andern Achse ergeben muß.

Erstes Beispiel. Wie groß ist eine ellipsenförmige Tischplatte von 126 cm. Länge und 84 cm. Breite ($\frac{\pi}{4} = {}^{11}/_{14}$.)

$126 \,.\, 84 \,.\, {}^{11}/_{14} = 9 \,.\, 84 \,.\, 11 = 8316$ □cm. = 0,8316 □m.

Zweites Beispiel. Der Boden einer elliptischen Wanne soll bei 84 cm. Breite einen Flächeninhalt von 1,1088 □m. haben. Wie viel muß die größte Länge der Bodenfläche betragen? ($\frac{\pi}{4} = {}^{11}/_{14}$).

Flächeninhalt = 1,1088 □m. oder 11088 □cm. Demnach ist die Längenachse der Bodenfläche $= \frac{11088 \,.\, 14}{84 \,.\, 11} =$ $\frac{1008}{6} = 168$ cm.

Anmerk. Gewöhnliche Langrunde pflegt man bei der Berechnung des Flächeninhalts als Ellipsen zu betrachten.

Uebungsaufgaben. Gegeben: Gesucht:

	Gegeben:		Gesucht:
	Längenachse.	Breitenachse.	Flächeninhalt.
$\pi = {}^{22}/_7$	211. $10\frac{1}{2}$ m.	4 m.	33 □m.
	212. 9 "	7 "	$49\frac{1}{2}$ "
	213. 8 "	7 "	44 "
	Breitenachse.	Flächeninhalt.	Längenachse.
	214. 7 m.	55 □m.	10 m.
	215. $5\frac{1}{4}$ "	53 "	8 "
	216. 8 "	70,4 "	11,2 "

3. Um den Umfang einer Ellipse annähernd zu finden, hat man die halbe Summe der beiden Achsen mit π (annähernd ${}^{22}/_7$) zu multipliciren. Dieses Verfahren beruht auf der Annahme, daß der Umfang einer Ellipse gleich ist der Peripherie eines Kreises, welcher die halbe Summe der beiden Ellipsen-Achsen zum Durchmesser hat.

Beispiel. Welchen Umfang hat eine Ellipse, deren Achsen bezüglich 8 m. und 6 m. betragen? ($\pi = {}^{22}/_7$).

Die halbe Summe der Achsen $= \frac{8 + 6}{2} = {}^{14}/_2 = 7$ m.

Daher ist der Umfang der Ellipse $= 7 \times {}^{22}/_7 = 22$ m.

Uebungsaufgaben. Gegeben: Gesucht:

	Erste Achse.	Zweite Achse.	Umfang.
$\pi = {}^{22}/_7$	217. 9 m.	5 m.	22 m.
	218. 5,4 "	3 "	13,2 "
	219. 12 "	9 "	33 "
	220. 6,5 "	4 "	16,5 "

Anmerk. Hinsichtlich des Flächeninhalts ist die Ellipse gleich einem Kreise, der die mittlere Proportionale ihrer beiden Achsen (resp. Halbachsen) zum Durchmesser (resp. Halbmesser) hat.

§ 18.

Berechnung jeder beliebigen ebenen Figur.

Unregelmäßige ebene Figuren, deren Begrenzung (Umfang) krumm- oder gemischtlinig ist, werden ihrem Inhalte nach näherungsweise bestimmt, wenn man sich die krummlinige Figur in eine geradlinige von augenscheinlich demselben Inhalte verwandelt denkt und diesen Inhalt nach § 12 berechnet. Soll aber das Resultat möglichst genau gefunden werden, so muß man sich 2 solche geradlinige Figuren denken, von denen die eine größer, die andere kleiner ist, als die krummlinige Figur selbst. Die Inhalte dieser beiden geradlinigen Figuren sind die Grenzwerthe, innerhalb deren der Inhalt der krummlinigen Figur liegen muß. Weichen daher erstere selbst wenig von einander ab, so ist man sicher, daß einer derselben unbedenklich als Inhalt der zu berechnenden krummlinigen Figur betrachtet werden kann. Andernfalls ergiebt sich der gesuchte Flächeninhalt ziemlich genau, wenn man die Inhalte der beiden geradlinigen Figuren zusammenzählt und von der erhaltenen Summe die Hälfte nimmt, vorausgesetzt nämlich, daß die beiden geradlinigen Figuren dem Augenschein nach in ihrer Größe von der gegebenen krummlinigen Figur wenig abweichen.

Körperrechnung.

§ 19.

Das Würfel oder Kubus.

1. Der Würfel wird von 6 gleich großen Quadraten begrenzt, die seine Oberfläche bilden. Multiplicirt man die Länge einer Kantenlinie mit sich selbst, so ergiebt sich der Inhalt eines solchen Quadrats. Demnach ist die ganze Oberfläche des Würfels das Sechsfache des soeben erwähnten Inhalts.

Der Würfel hat 8 Ecken und 12 Kanten (Kantenlinien).

Beispiel. Wie groß ist die Oberfläche eines Würfels von 2 m. Höhe?

Ein Quadrat des Würfels $= 2 \times 2 = 4$ □m.
Summe der 6 Quadrate $= 6 \times 4 = 24$ □m.

Folglich hat obiger Würfel eine Oberfläche von 24 □m.

Uebungsaufgaben. In einem Würfel ist

Gegeben: Kantenlänge.	Gesucht: Oberfläche.
221. 8 cm.	384 □cm.
222. 9 „	486 „
223. 10 „	600 „
224. $5^1/_2$ „	$181^1/_2$ „
225. $6^1/_2$ „	$253^1/_2$ „

2. Soll umgekehrt aus der Oberfläche eines Würfels die Kantenlinie desselben berechnet werden, so hat man die gegebene Oberfläche durch 6 zu dividiren und aus der gefundenen Zahl die Quadratwurzel zu ziehen.

Beispiel. Wie lang ist die Seitenkante eines Würfels von von 864 □cm. Oberfläche?

Jedes der 6 Quadrate, aus denen die Oberfläche besteht, beträgt $\frac{864}{6}$ □cm. Mithin ist die Seitenkante $= \sqrt{144} = 12$ cm.

Uebungsaufgaben. In einem Würfel ist

Gegeben: Oberfläche.	Gesucht: Seitenkante.
226. 216	6 cm.
227. 294	7 "
228. 337½	7½ "
229. 433½	8½ "
230. 500	9,1287 cm.

3. Der körperliche Inhalt eines Würfels wird gefunden, wenn man eine Kantenlinie desselben zur dritten Potenz erhebt, d. h. wenn man ihre Maßzahl dreimal als Factor setzt und diese drei Factoren mit einander multiplicirt.

Beispiel. Die Kantenlinie eines Würfels beträgt 15 cm; wie groß ist der Kubikinhalt desselben?

$15 \times 15 \times 15 = 3375$ ⧉cm.

Als Potenzausdruck wird das Produkt $15 \times 15 \times 15$ kürzer mit 15^3 bezeichnet und alsdann 15 zur dritten (Potenz) gelesen.

Anmerk. In diesem Beispiel ist 3375 die Kubikzahl von 15, während die Zahl 15 die Kubikwurzel von 3375 ist. Die Maßzahl der Kantenlinie eines Würfels ist stets die Kubikwurzel der Maßzahl des Kubikinhalts.

Uebungsaufgaben. In einem Würfel ist

Gegeben: Seitenkante.	Gesucht: Kubikinhalt.
231. 2 m.	8 ⧉m.
232. 3 "	27 "
233. 4 "	64 "
234. 4½ "	91⅛ "
235. 5½ "	166⅜ "

4. Aus dem Vorhergehenden erhellt, daß man, um aus dem Kubikinhalte eines Würfels die Kantenlinie desselben zu berechnen, eine Zahl zu finden habe, welche, zur dritten Potenz erhoben, die Maßzahl des gegebenen Kubikinhalts liefert. Derartige Berechnungen bestehen also im Ausziehen der Kubikwurzel.

Beispiel. Wie groß ist die Kantenlinie (Seite) eines Würfels von 125 ⊞m. Inhalt?

Die Seitenkante ist gleich der Kubikwurzel von 125, oder wie man schreibt, $= \sqrt[3]{125} = 5$ m.

Uebungsaufgaben. In einem Würfel ist

	Gegeben: Kubikinhalt.	Gesucht: Seitenkante.
236.	216 ⊞cm.	6 cm.
237.	343 "	7 "
238.	512 "	8 "
239.	729 "	9 "
240.	1000 "	10 "
241.	1331 "	11 "
242.	1728 "	12 "
243.	$15^5/_8$ "	$2^1/_2$ "
244.	$42^7/_8$ "	$3^1/_2$ "
245.	$91^1/_8$ "	$4^1/_2$ "

Anmerk. 1. Soll die Kubikwurzel einer gemischten Zahl berechnet werden, so hat man letztere in einen unechten Bruch zu verwandeln, aus dem Zähler und aus dem Nenner desselben die Kubikwurzel zu ziehen und schließlich die Kubikwurzel des Zählers durch diejenige des Nenners zu dividiren. (S. Aufg. 243—245.)

Anmerk. 2. Da die Berechnung mehrstelliger Kubikwurzeln auf einem ziemlich umständlichen Verfahren beruht, so halten wir es für gerathen, nun einige praktische Winke folgen zu lassen, deren Beachtung den aufmerksamen Leser in den meisten Fällen zur Bestimmung der gesuchten Kubikwurzel befähigen wird.

§ 20.

Vom Ausziehen der Kubikwurzel.

1. Die zehn ersten Kubikzahlen nebst ihren Kubikwurzeln sind:

Kubikzahl:	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.
Kubikwurzel:	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Jede der hier angeführten Kubikzahlen hat eine andere Endziffer rechts, und kann daher aus derselben bei einer vollkommenen Kubikzahl auf die entsprechende Wurzelziffer geschlossen werden, während überdies obiges Täfelchen die (erste) Wurzelziffer zu den ersten Stellen links in der Kubikzahl ergiebt.

Es sei z. B. $\sqrt[3]{21952}$ zu bestimmen. Zunächst hat man die gegebene Kubikzahl von rechts nach links in Klassen von 3 Stellen abzutheilen, wodurch sich in vorliegendem Falle ergiebt:

$$\sqrt[3]{21|952}$$

Die erste Klasse links ist hier = 21, welche Zahl nach obigem Täfelchen — weil zwischen den Kubikzahlen 8 und 27 liegend — die unter 8 stehende 2 zur Kubikwurzel hat, indem nur ganze Zahlen hierbei in Betracht kommen. In der zweiten Klasse rechts steht die Zahl 952, deren Endziffer 2 ist, und die daher die unter 512 stehende 8 im Täfelchen zur Wurzel haben muß. Folglich ergiebt sich $\sqrt{21|952} = 28$, wobei jedoch vorausgesetzt wird, daß 21952 eine vollkommene Kubikzahl ist. Um die Richtigkeit des Resultats nachzuweisen, machen wir nun die Probe und finden hierdurch $28 \times 28 \times 28 = 21952$.

Da sieben- bis neunstellige Kubikzahlen eine dreistellige Kubikwurzel haben, so ist bei solchen zur Bestimmung der zweiten (mittleren) Wurzelziffer eine besondere Berechnung erforderlich, wodurch wir genöthigt werden, uns mit dem eigentlichen Ausziehen der Kubikwurzel näher bekannt zu machen.

2. Beispiel und Erläuterung.

	$\sqrt[3]{105\,|\,823\,|\,817}$	$= 4$
4^3 oder $4 \times 4 \times 4 =$	64	
$3 \times 4^2 = 48$ in	41 8	$= 7$
$48 \times 7 =$	33 6	
	8 22	
$3 \times 4 \times 7^2 =$	5 88	
	2 343	
$7^3 =$	343	
$3 \times 47^2 = 6627$ in	2 000 8	$= 3$
$6627 \times 3 =$	1 988 1	
	127 1	
$3 \times 47 \times 3^2 =$	126 9	
	27	
$3^3 =$	27	

oder

$\sqrt[3]{105\,|\,823\,|\,817} =$ 47 3 (a b; a = 47, b = 3)

$a^3 =$	64	$a = 4;\ b = 7$
$3\,a^2 b = 336$	41 823	$3\,a = 12$
$3\,a\,b^2 = 588$		$a^2 = 16;\ b^2 = 49$
$b^3 = 343$		$3\,a^2 = 48;\ b^2 = 343$
39823 . . .	39823	
	2000 817	$a = 47;\ b = 3$
$3\,a^2 b = 19881$		$3\,a = 141$
$3\,a\,b^2 = 1269$		$a^2 = 2209;\ b^2 = 9$
$b^3 = 27$		$3\,a^2 = 6627;\ b^3 = 27$
2000817 . . .	2000 817	

Es ist also $\sqrt[3]{105823817} = 473$.

Jedes Ausziehen der Kubikwurzel beginnt damit, daß man die gegebene Kubikzahl von rechts nach links in Klassen von drei Stellen eintheilt. Die erste Klasse links im vorigen Beispiel enthält die Ziffern 105, wozu sich in unserm Täfelchen

die Kubikwurzel 4 findet. Die Kubikzahl von 4 ist 4^3 oder $4 \times 4 \times 4 = 64$. Diese Zahl von 105 abgezogen, giebt den Rest 41. Verbindet man hiermit nach dem ersten Verfahren die nächste Ziffer 8 aus der zweiten Klasse, so ergiebt sich die Zahl 418, in welcher die dreifache Quadratzahl des ersten Theils, nämlich 3×4^2 oder $3 \times 4 \times 4 = 48$, siebenmal enthalten ist. Demgemäß sind nun schon zwei Wurzelziffern bekannt: der erste Theil = 4, der zweite = 7. Das Produkt aus dem dreifachen Quadrat des ersten Theils und dem zweiten Theil, d. i. $3 \times 4^2 \times 7$ oder $3 \times 4 \times 4 \times 7 = 336$, von der oben erwähnten Zahl 418 abgezogen, giebt den Rest 82, welcher mit der zweiten Stelle der zweiten Klasse die Zahl 822 bildet. Vermindert man diese Zahl um das Produkt aus dem dreifachen ersten Theile und dem Quadrate des zweiten Wurzeltheils, d. i. um $3 \times 4 \times 7^2$ oder $3 \times 4 \times 7 \times 7 = 588$, so findet sich der Rest 234, welcher mit der letzten Ziffer 3 der zweiten Klasse die Zahl 2343 bildet. Hiervon muß noch die Kubikzahl des zweiten Theils, $7^3 = 343$, abgezogen werden, wodurch ein neuer Rest = 2000 entsteht, an welchem wir die Ziffer 8 aus der dritten Klasse als neue Stelle rechts anhängen. Die bereits gefundenen Wurzelziffern, nämlich 47, betrachten wir nun als ersten Theil der zu suchenden Kubikwurzel. Das Dreifache der Quadratzahl von 47, d. i. 3×47^2 oder $3 \times 47 \times 47 = 6627$, ist in der zuletzt entstandenen Zahl 20008 dreimal enthalten, womit die letzte Wurzelziffer oder der zweite Theil der gesuchten Kubikwurzel = 3 gefunden ist. Nun hat man $20008 - (6627 \times 3)$ oder $20008 - 19881 = 127$, woraus durch Hinzufügung der Ziffer 1 aus der dritten Klasse die Zahl 1271 entsteht, von welcher das Produkt aus dem dreifachen ersten Theil und dem Quadrat des zweiten Theils nämlich $3 \times 47 \times 3^2$ oder $3 \times 47 \times 3 \times 3 = 1269$, abgezogen werden muß. Der sich hierbei ergebende Rest = 2 bildet mit der letzten Ziffer 7 aus der dritten Klasse der vorliegenden Kubikzahl die Zahl 27, welche um die Kubikzahl des zweiten Theils, d. i. um $3^3 = 27$, vermindert, keinen Rest ergiebt. Mithin ist 473 die Kubikwurzel von 105823817.

Unter der Voraussetzung, daß 105823817 wirklich eine vollkommene Kubikzahl ist, läßt sich nach oben gemachten Andeutungen mit Hülfe des Täfelchens aus der Endziffer sogleich die letzte Wurzelziffer rechts = 3 finden. Das eben gegebene Verfahren lehrt aber auch den Weg kennen, auf welchem alle Ziffern der gesuchten Wurzel zu berechnen sind.

Anstatt die in Betracht kommenden Produkte einzeln abzuziehen, kann man, wie die zweite Lösung obigen Beispiels zeigt, dieselben vorher summiren und alsdann erst subtrahiren. Nur muß hierbei immer eine ganze Klasse von drei Stellen den letzten Reste hinzugefügt werden.

Anmerk. Wenn der erste Theil der gesuchten Kubikwurzel mit a, der zweite mit b bezeichnet wird, so ist die zugehörige Kubikzahl $= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, und zwar stellt vor:

a^3 die Kubikzahl des ersten Theils,
$3a^2b$ das Produkt aus dem dreifachen Quadrate des ersten Theils und dem zweiten Theile,
$3ab^2$ das Produkt aus dem dreifachen ersten Theile und dem Quadrate des zweiten Theils,
b^3 die Kubikzahl des zweiten Theils.

Auf der widerholten Subtraction dieser vier Zahlen — nur a^3 wird blos einmal abgezogen — beruht hauptsächlich das Ausziehen mehrstelliger Kubikwurzeln.

Dasselbe Verfahren gilt auch für die unvollkommenen Kubikzahlen, deren Kubikwurzeln aus Ganzen und zehntheiligen oder Decimalbrüchen bestehen.

3. Anwendung des Wurzelausziehens.

Wie groß ist die Seitenkante und Oberfläche eines Würfels von 636056 □cm. Inhalt?

Die Seitenkante des Würfels beträgt 86 cm. denn

$$\sqrt[3]{636|056} = 8$$
$$8^3 = 512$$
$$3 \times 8^2 = 192 \text{ in } 1240 \quad = .\,6$$
$$6 \times 192 = 1152 \qquad \overline{86 \text{ cm.}}$$
$$885$$
$$3 \times 8 \times 6^2 = 864$$
$$216$$
$$6^3 = 216$$

Daher ist die Oberfläche = 6 × 86 × 86 = 44376 □cm. = 4,4376 □m. oder 4 □m. 43 □dm. 76 □cm.

Uebungsaufgaben. In einem Würfel ist

Gegeben:		Gesucht:
Kubikinhalt.	Kantenlinie.	Oberfläche.
246. 2197 ⧆cm.	13 cm.	1014 □cm.
247. 3375 "	15 "	1350 "
248. 9261 "	21 "	2646 "
249. 32768 "	32 "	6144 "
250. 2 ⧆m.	1,2599 m.	9,5240 □m.
251. 3 "	1,4422 "	12,4805 "
252. 4 "	1,5874 "	15,1191 "
253. 5 "	1,7100 "	17,5441 "

§ 21.

Das Parallelepipedon.

1. Jeder von sechs Parallelogrammen begrenzte Körper, der durchweg gleich dick ist, heißt ein Parallelepipedon. Letzteres ist ein rechtwinkliges, wenn sämmtliche Begrenzungsflächen desselben Rechtecke sind. Rechtwinklige Parallelepipeda sind z. B. Ziegel- und Backsteine, Mauern, Schränke oder Spinden, Kisten, (vierseitige) Oefen, der innere Raum eines Zimmers, Häuser nach Abrechnung des Dachraumes u. s. w. Von den beiden Ausdehnungen der Grundfläche heißt die größere die Länge und die kleinere die Breite, während der senkrechte Abstand der Grundfläche von der ihr gegenüberliegenden oberen Fläche die Höhe genannt wird. Die Grundfläche und die mit ihr parallele obere Fläche heißen zusammen End- oder Grundflächen, und die zwischen denselben liegenden vier Flächen führen den Namen Seitenflächen. Die Summe der vier Seitenflächen ergiebt den Mantel des Parallelepipedons. Zählt man zum Mantel noch den Inhalt der beiden Grundflächen, so ergiebt sich die Oberfläche des Körpers. Die Höhe eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist durch die Seitenkante gegeben, welche die beiden Grundflächen verbindet.

2. Ist Länge, Breite und Höhe in einerlei einfachem Maße ausgedrückt, so ergiebt das Produkt ihrer Maßzahlen den Kubikinhalt des Parallelepipedons. Die Grundfläche wird gefunden, wenn man die Länge mit der Breite multiplicirt. Um aus dem Kubikinhalte die Grundfläche oder die Höhe zu finden, dividire man denselben im ersteren Falle durch die Höhe, im letzteren durch die Grundfläche. Ueberhaupt ergiebt der Kubikinhalt, dividirt durch eine Ausdehnung, das Produkt der beiden andern Ausdehnungen, und durch das Produkt zweier beliebigen Ausdehnungen dividirt, die dritte Ausdehnung des Körpers. Soll der innere Rauminhalt eines hohlen parallelepipedischen Körpers berechnet werden, so sind alle Ausdehnungen im Lichten, d. h. innerhalb, zu messen. Zieht man den inneren Rauminhalt von dem ausgefüllt gedachten Körper ab, so ergiebt sich die Größe der einschließenden Körpermasse.

Erstes Beispiel. Wie viel Kubikmeter beträgt eine Mauer, welche 28 m. lang, $1\frac{3}{4}$ m. dick und $6\frac{1}{2}$ m. hoch ist?

Die erwähnte Maurer enthält $28 \times 1\frac{3}{4} \times 6\frac{1}{2} = \frac{28 \times 7 \times 13}{4 \times 2} = \frac{7 \times 7 \times 13}{2} = {}^{637}/_{2} = 318\frac{1}{8}$ ⧉m.

Zweites Beispiel. Ein Holzhaufen, welcher 6 m. lang, 4 m. breit und 1,75 m. hoch ist, soll auf einen 8 m. langen und 2 m. breiten Raum gesetzt werden. Welche Höhe muß nun der Holzhaufen erhalten?

Der Holzhaufen enthält beide Mal $6 \times 4 \times 1{,}75 = 42$ ⧉m. Da seine Grundfläche $8 \times 2 = 16$ □m. betragen soll, so muß das Holz im zweiten Falle ${}^{42}/_{16} = {}^{21}/_{8} = 2\frac{5}{8}$ oder 2,625 m., d. i. 2 m. 6 dm. 2 cm. 5 mm. hoch zu liegen kommen.

Drittes Beispiel. Wie groß ist die innere Bodenfläche eines im Lichten $1\frac{1}{5}$ m. hohen Kastens, welcher 6 ⧉m. Rauminhalt hat?

Die Bodenfläche enthält $\frac{6}{1\frac{1}{5}} = \frac{6 \times 5}{6} = 5$ □m.

Viertes Beispiel. Eine Eisenstange von 2 m. Länge, 1 cm. Breite und 1 cm. Dicke wiegt $1\frac{1}{2}$ Kg. Wie viel wiegt

hiernach eine Eisenstange von $3\frac{1}{5}$ m. Länge, $1\frac{1}{4}$ cm. Breite und 1 cm. Dicke?

Die erste Eisenstange ist 2 m. oder 200 cm. lang und enthält $200 \times 1 \times 1 = 200$ ⊞cm. Die zweite Eisenstange ist $3\frac{1}{5}$ m. oder 320 cm. lang und enthält $320 \times 1\frac{1}{4} \times 1 = 400$ ⊞cm. Da 200 ⊞cm. Eisen ein Gewicht von $1\frac{1}{2}$ Kg. haben, so wiegen 400 ⊞cm. $\frac{400}{200} \times 1\frac{1}{2} = 2 \times 1\frac{1}{2} = 3$ Kg.

Fünftes Beispiel. Welchen Werth hat ein Haufen Buchenholz von 6 m. Länge, $1\frac{1}{2}$ m. Breite und 1 m. Höhe, wenn das Kubikmeter zu 7,50 Mark gerechnet wird?

Der erwähnte Haufen enthält $6 \times 1\frac{1}{2} \times 1 = 9$ ⊞m. und kostet daher $9 \times 7{,}50 = 67{,}50$ oder $67\frac{1}{2}$ Mark.

Sechstes Beispiel. Wie viel Kubikmaß Holz geben die Bretter einer Kiste (mit Deckel), wenn dieselbe, von außen gemessen, $1\frac{1}{5}$ m. lang, $\frac{4}{5}$ m. breit und $\frac{3}{5}$ m. hoch ist und die Dicke der Bretter durchweg 1 cm. beträgt?

Die ausgefüllt gedachte Kiste hat $1\frac{1}{5}$ m. = 120 cm. Länge, $\frac{4}{5}$ m. = 80 cm. Breite und $\frac{3}{5}$ m. = 60 cm. Höhe, und daher $120 \times 80 \times 60 = 576000$ ⊞cm. körperlichen Inhalt.

Bei der Berechnung des inneren leeren Raumes ist in Betracht zu ziehen, daß jede Ausdehnung desselben wegen der Dicke der Bretter $2 \times 1 = 2$ cm. weniger beträgt als die entsprechende Ausdehnung des vollen Körpers. Mithin ist die Kiste im Lichten $120 - 2 = 118$ cm. lang, $80 - 2 = 78$ cm. breit und $60 - 2 = 58$ cm. hoch, was einen räumlichen Inhalt von $118 \times 78 \times 58 = 533832$ ⊞cm. ergiebt.

Es beträgt also

der volle Körper 576000 ⊞cm.
der innere Raum 533832 „

folglich d. Kubikinhalt d. Bretter 42168 ⊞cm. oder 42 ⊞dm. 168 ⊞cm. = 0,042168 ⊞m.

Uebungsaufgaben.

254. Ein 5 m. langer Balken ist durchweg 20 cm. breit und 25 cm. dick. Wie viel beträgt sein körperlicher Inhalt? ($\frac{1}{4}$ ⊞m.)

255. Welchen Rauminhalt ergeben 1000 Torfziegel, von denen jeder 25 cm. lang, 10 cm. breit und 10 cm. dick ist, wenn auf die Zwischenräume des Haufens keine Rücksicht genommen wird? ($2\frac{1}{2}$ □m.)

256. Wie viel kostet 1 □m. Holz, wenn man für einen Haufen Holz von 4 m. Länge, $2\frac{1}{2}$ m. Breite und $1\frac{3}{4}$ m. Höhe 840 Mark zahlen muß? (48 Mk.)

257. Wie viel Goldstücke à 10 Mark lassen sich aus einer parallelepipedisch geformten Masse Gold von 8 cm. Länge 5 cm. Breite und 3 cm. Dicke prägen, wenn 1 Kg. Gold, dessen specifisches Gewicht $= 19\frac{1}{4}$ ist, 279 Zehn-Mark-Stücke ergiebt? (644,49 Goldstücke à 10 Mark.)

258. Welchen Werth hat eine Silberbarre von 10 cm. Länge, 1 cm. Breite und 1 cm. Dicke, wenn 1 Kg. Silber = 180 Mark berechnet wird und das specifische Gewicht des Silbers $= 10\frac{4}{5}$ ist? (19,44 Mk.)

259. In 15 Tagen machen 4 Mann einen Graben von 18 m. Länge, 2 m. Breite und $2\frac{1}{2}$ m. Tiefe. Wie viel Kubikmeter Erdarbeit schafft 1 Mann täglich? ($1\frac{1}{2}$ □m.)

260. Um einen 20 m. tiefen Brunnen mit quadratförmiger Grundfläche anzulegen, hat man 125 □m. Erde ausgraben müssen. Welche Länge und Breite hat die Oeffnung dieses Brunnens? (Die Länge, wie auch die Breite beträgt $2\frac{1}{2}$ m.)

3. Der Mantel eines Parallelepipedons, d. h. die Summe der Seitenflächen desselben, ist ein Produkt aus Umfang und Höhe des Körpers. Wird zum Mantel noch das doppelte Produkt aus Länge und Breite hinzugezählt, so erhält man die ganze Oberfläche, also die nicht sichtbare Grundfläche des Körpers mit eingerechnet.

Erstes Beispiel. Ein mit einem $1\frac{1}{2}$ m. hohen Bretterzaun versehener Garten ist 20 m. lang und 16 m. breit. Wie viel kostet der Anstrich des Zauns, wenn pro Quadratmeter $\frac{3}{4}$ Mark gerechnet wird?

Der halbe Umfang des Gartens beträgt $20 + 16 = 36$ m., mithin der ganze Umfang $2 \times 36 = 72$ m. Demgemäß

sind 72 $\times$ $1\frac{1}{2}$ = 108 □m. anzustreichen, welche 108 $\times$ $\frac{3}{4}$ = 81 Mark kosten.

Zweites Beispiel. Ein senkrechter vierseitiger Pfeiler ist $\frac{3}{4}$ breit, $\frac{1}{2}$ m. tief und 16 m. hoch. Wiel viel beträgt a. der Mantel; b. die Deckfläche; c. die Gesammt-Oberfläche?

a. Halber Umfang = $\frac{3}{4}$ + $\frac{1}{2}$ = $1\frac{1}{4}$ m.
Ganzer Umfang = 2 $\times$ $1\frac{1}{4}$ = $2\frac{1}{2}$ m.
Mantel = 16 $\times$ $2\frac{1}{2}$ = 40 □m.
b. Deckfläche = $\frac{3}{4}$ $\times$ $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{8}$ □m.
c. Grundfläche ebenfalls = $\frac{3}{4}$ $\times$ $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{8}$ □m.
Gesammt-Oberfläche = 40 + $\frac{3}{8}$ + $\frac{3}{8}$ = $40\frac{3}{4}$ □m.

Uebungsaufgaben. Von einem Parallelepipedon ist

Gegeben:			Gesucht:	
Länge.	Breite.	Höhe.	Mantel.	Oberfläche.
261. 3 m.	2 m.	$1\frac{1}{2}$ m.	15 □m.	27 □m.
262. 4 "	3 "	2 "	28 "	52 "
263. 5 "	3 "	2 "	32 "	62 "
264. 4 "	4 "	$1\frac{1}{2}$ "	24 "	56 "
265. 6 "	4 "	3 "	60 "	108 "

4. Unter allen parallelepipedischen Körpern von gleichem Kubikinhalt hat der Würfel die kleinste Oberfläche.

Beispiel. Ein Klempner hat einen Blechkasten zu verfertigen, der 512 ⊞cm. Raum haben soll. Er kann denselben 8 cm. lang und 8 cm. breit oder 8 cm. lang und 4 cm. breit machen. Wie hat er, um möglichst Material zu sparen, hiernach zu verfahren?

Der 512 ⊞cm. große Kasten wird bei 8 cm. Länge und 8 cm. Breite $\frac{512}{8 \times 8}$ = 8 cm. hoch. Der halbe Umfang seiner Grundfläche beträgt 8 + 8 = 16 cm., mithin der ganze Umfang 2 $\times$ 16 = 32 cm. Da die Höhe = 8 cm. ist, so findet sich hiernach

der Mantel = 32 $\times$ 8 = 256 □cm.
Hierzu die Grundfläche = 8 $\times$ 8 = 64 "
die Deckfläche = 8 $\times$ 8 = 64 "

Folglich beträgt die Gesammt-Oberfläche 384 □cm.

Erhält aber der Kasten eine Länge von 8 cm. und eine Breite von 4 cm., so ist seine Höhe $= \frac{512}{8 \times 4} = 16$ cm. und der Umfang seiner Grundfläche $= 2 \times (8 + 4) = 2 \times 12 = 24$ cm.; mithin

der Mantel $= 24 \times 16 = 384$ □cm.
Hierzu die Grundfläche $= 8 \times 4 = 32$ „
die Deckfläche $= 8 \times 4 = 32$ „ .

Demnach ist die Gesammt-Oberfläche $= 448$ □cm.

Im ersten Falle sind also 384 □cm. Blech erforderlich, im zweiten Falle hingegen 448 □cm. Giebt daher der Klempner obigem Kasten Würfelform, so spart er 448 — 384 = 64 □cm. Blech.

Uebungsaufgaben. Von einem 1782 ⧉cm. großen Parallelepipedon ist

	Gegeben: Länge.	Breite.	Höhe.	Gesucht: Oberfläche.
266.	12 cm.	12 cm.	12 cm.	864 □cm.
267.	24 „	9 „	8 „	960 „
268.	27 „	8 „	8 „	992 „
269.	18 „	16 „	6 „	984 „
270.	18 „	8 „	12 „	912 „
271.	6 „	8 „	36 „	1104 „

5. Unter allen parallelepipedischen Körpern von gleicher Oberfläche hat der Würfel den größten Kubikinhalt.

Beispiel. Von zwei Blechkasten, jeder mit 216 □cm. Oberfläche, ist der eine würfelförmig, der andere ein Parallelepipedon von 6 cm. Länge und 3 cm. Breite. Um wie viel Kubik-Centimeter ist der eine Kasten größer als der andere?

Die Oberfläche des würfelförmigen Kastens besteht aus sechs gleichen Quadraten. Mithin enthält jedes derselben $^{216}/_{6} = 36$ □cm., so daß die Kante des Würfels $= \sqrt{36} = 6$ cm. ist. Demnach ist der Kubikinhalt des würfelförmigen Kastens $= 6 \times 6 \times 6 = 216$ ⧉cm.

Die Grundfläche des 6 cm. langen und 3 cm. breiten Kastens enthält 6 × 3 = 18 □cm; folglich betragen Grund und Deckfläche zusammen 18 + 18 = 36 □cm., so daß die Summe der Seitenflächen, nämlich der Mantel = 216 — 36 = 180 □cm. ist. Der Umfang der Grundfläche beträgt aber 2 × (6 + 3) = 2 × 9 = 18 cm., folglich die Höhe des Kastens $^{180}/_{18}$ = 10 cm. Aus der Länge = 6 cm., der Breite = 3 cm. und der Höhe = 10 cm. ergiebt sich schließlich der Kubikinhalt = 6 × 3 × 10 = 180 ⧉cm.

Demnach ist der würfelförmige Kasten um 216 — 180 = = 36 ⧉cm. größer.

Uebungsaufgaben. Von einem Parallelepipedon, dessen Gesammt-Oberfläche 384 □cm. beträgt, ist

Gegeben:			Gesucht:	
	Länge.	Breite.	Höhe.	Kubikinhalt.
272.	8 m.	8 m.	8 m.	512 ⧉m.
273.	9 „	5 „	$10^1/_2$ „	$472^1/_2$ „
274.	12 „	8 „	$4^4/_5$ „	$460^4/_5$ „
275.	9 „	6 „	$9^1/_5$ „	$496^4/_5$ „

§ 22.

Die Prismen oder eckigen Säulen.

1. Das Prisma, wozu auch das Parallelepipedon gehört, ist ein Körper, welcher zwei gleiche und parallele geradlinige Figuren (Dreiecke, Vierecke, Vielecke) zu Grundflächen und lauter Parallelogramme zu Seitenflächen hat. Demnach sind alle eckigen Säulen von durchweg gleicher Dicke Prismen. Sind die Seitenflächen sämmtlich Rechtecke, so heißt das Prisma ein senkrechtes, und giebt alsdann eine Seitenkante die Höhe desselben an. Das senkrechte Prisma ist zugleich ein regelmäßiges, wenn es eine regelmäßige Figur zur Grundfläche hat. Die Höhe des schiefen Prisma ist gleich dem senkrechten Abstande der beiden Grundflächen.

2. Um den Kubikinhalt eines Prisma zu berechnen, multiplicire man den Inhalt der Grundfläche mit der Höhe. Ist

die Grundfläche ein reguläres Vieleck, so hat man zur Berechnung dieser Fläche die in § 11 gegebene Tabelle zu benutzen. Der Kubikinhalt des Prisma, durch die Höhe dividirt, ergiebt den Inhalt der Grundfläche, und durch die Grundfläche dividirt, die Maßzahl der Höhe.

Erstes Beispiel. Ein 20 m. hohes Prisma hat ein reguläres Dreieck von 2 m. Seitenlänge zur Grundfläche. Wie viel beträgt der Kubikinhalt?

Die Grundfläche ist (nach § 9) $= \frac{2 \times 2 \times 433}{1000}$ □m., und daher der Kubikinhalt des 20 m. hohen Prisma $= \frac{2 \times 2 \times 433 \times 20}{1000}$ oder $\frac{2 \times 433}{25} = {}^{866}/_{25} = 34\,{}^{16}/_{25}$ ⧉m. d. i. zwischen $32\,{}^{3}/_{5}$ und $34\,{}^{2}/_{3}$ ⧉m.

Zweites Beispiel. Wie groß ist ein 20 m. hohes Prisma mit quadratischer Grundfläche, deren Seitenlänge 2 m. beträgt?

Grundfläche $= 2 \times 2 = 4$ □m.
Kubikinhalt $= 20 \times 4 = 80$ ⧉m.

Drittes Beispiel. Die Grundfläche eines 20 m. hohen Prisma ist ein reguläres Fünfeck von 2 m. Seitenlänge. Wie viel beträgt der körperliche Inhalt?

Nach § 11 ist die Grundfläche $= \frac{2 \times 2 \times 172}{100}$ od. 6,88 □m. Demnach ist der Kubikinhalt $= 20 \times 6{,}88 = 2 \times 68{,}8 = 137{,}6$ oder $137\,{}^{3}/_{5}$ ⧉m.

Viertes Beispiel. Ein 20 m. hohes Prisma hat ein reguläres Sechseck von 2 m. Seitenlänge zur Grundfläche. Wie viel beträgt der Kubikinhalt?

Grundfläche (nach § 11) $= 2 \times 2 \times 2{,}598$ □m.
Kubikinhalt $= 20 \times 2 \times 2 \times 2{,}598 = 8 \times 25{,}98 = 207{,}84$ ⧉m. oder 207 ⧉m. 840 ⧉dm.

Fünftes Beispiel. Das Mauerwerk eines Gebäudes von regelmäßig-achteckiger Form ist 40 m. hoch und an jeder Seite 10 m. lang.

a. Welchen Raum nimmt das Gebäude ohne Dach ein?
b. Welchen Kubikinhalt hat das Mauerwerk selbst, wenn die Seite desselben, innerhalb gemessen, 8 m. beträgt?

a. Grundfläche des Gebäudes = 10 × 10 × 4,8284 = 482,84 □m; Kubikinhalt = 40 × 482,84 = 4×4828,4 = 19313,6 ⧆m.

b. Grundfläche des inneren Raumes = 8 × 8 × 4,8284 = 309,0176 □m. Der innere Rauminhalt = 40 × 309,0176 = 4 × 3090,176 = 12360,704 ⧆m.

Wird dieser Rauminhalt von dem unter a. gefundenen Kubikinhalt abgezogen, so ergiebt sich der kubische Inhalt des Mauerwerks = 19313,6 ⧆m. — 12360,704 ⧆m. = 6952,896 ⧆m. = 6952 ⧆m. 896 ⧆dm.

Sechstes Beispiel. Ein Prisma von 96 ⧆m. Inhalt ist 8 m. hoch; wie groß ist seine Grundfläche?

$^{96}/_{8} = 12$ □m.

Siebentes Beispiel. Ein Prisma von 128 ⧆m. Inhalt hat eine 16 □m. große Grundfläche; wie hoch ist es?

$^{128}/_{16} = 8$ m.

Uebungsaufgaben.

Gegeben:			Gesucht:
reg. Prisma.	Grundkante.	Höhe.	Kubikinhalt.
276. dreiseitiges	10 m.	20 m.	866 ⧆m.
277. vierseitiges	8 "	20 "	1280 "
278. sechsseitiges	6 "	20 "	1870,56 "
279. achtseitiges	5 "	20 "	$2414^{1}/_{5}$ "
280. zehnseitiges	4 "	20 "	2462,144 "

Von einem Prisma ist

Gegeben:		Gesucht:
Kubikinhalt.	Höhe.	Grundfläche.
281. 90 ⧆m.	$7^{1}/_{2}$ m.	$12^{4}/_{5}$ m.
282. 160 "	$12^{1}/_{2}$ "	$12^{4}/_{5}$ "
283. 180 "	$12^{4}/_{5}$ "	$15^{5}/_{8}$ "

Von einem Prisma ist

Gegeben:		Gesucht:
Kubikinhalt.	Grundfläche.	Höhe.
284. 60 Kbm.	16 □m.	$3\frac{3}{4}$ m.
285. 72 „	15 „	$4\frac{4}{5}$ „
286. 156 „	24 „	$6\frac{1}{2}$ „

3. Durch Multiplication des Umfanges mit der Höhe findet sich der Mantel, d. i. die Summe der Seitenflächen des Prisma. Der Mantel ergiebt, um die beiden Grundflächen vermehrt, den Inhalt der ganzen Oberfläche. Die sichtbare Oberfläche eines Prisma ist gleich der Summe aus dem Mantel und einer Grundfläche.

Beispiel. Eine 12 m. hohe Säule hat ein regelmäßiges Sechseck von $\frac{1}{2}$ m. Seitenlänge zur Grundfläche. Wie hoch kommt der Oelanstrich sämmtlicher Seitenflächen, wenn man pro Quadratmeter $1\frac{1}{2}$ Mark rechnet?

Umfang der Grundfläche $= 6 \times \frac{1}{2} = 3$ m.; Höhe $=$ 12 m.; folglich die Summe der Seitenflächen $= 3 \times 12 =$ 36 □m., welche $36 \times 1\frac{1}{2} = 54$ Mark kosten.

Uebungsaufgaben.

Gegeben:			Gesucht:
reguläres Prisma.	Grundkante.	Höhe.	Mantel.
287. dreiseitiges	1 m.	10 m.	30 □m.
288. vierseitiges	$1\frac{1}{2}$ „	12 „	72 „
289. sechsseitiges	$1\frac{1}{4}$ „	16 „	120 „
290. achtseitiges	2 „	20 „	320 „

4. Soll ein schief abgeschnittenes Prisma, d. h. ein Prisma mit ungleichlaufenden Endflächen, berechnet werden, so denke man sich dasselbe an einen eben solchen Körper derartig gelegt, daß die gleichen Durchschnittsflächen auf einander fallen. Hierdurch entsteht ein Prisma, welches hinsichtlich des Volumens (Größe) und Mantels doppelt so groß ist als das gegebene, schief abgeschnittene Prisma. Demgemäß kann man die Größe und den Mantel eines schief abgeschnittenen Prisma leicht berechnen, wenn man letzteres als ein wirkliches

Prisma betrachtet, das bei derselben Grundfläche die Durchschnittshöhe aller Seitenkanten zur Höhe hat. Diese Durchschnittshöhe ist gleich der Summe aus den Höhen aller Seitenkanten, dividirt durch die Anzahl der Seitenkanten.

Erstes Beispiel. In einem schief abgeschnittenen Prisma, dessen Grundfläche ein reguläres Dreieck von 2 m. Seitenlänge ist, betragen die senkrecht stehenden Seitenkanten der Reihe nach 8, 9 und 10 m. Wie groß ist a. der Kubikinhalt; b. der Mantel des Körpers?

a. Summe der drei Höhen $= 8 + 9 + 10 = 27$ m., folglich die Durchschnittshöhe $= {}^{27}/_{3} = 9$ m. Da die Grundfläche $2 \times 2 \times {}^{433}/_{1000} = 1{,}732$ □m. enthält, so beträgt der Kubikinhalt $9 \times 1{,}732 = 15{,}588$ ⊞m. $=$ 15 ⊞m. 588 ⊞dm.

b. Umfang der Grundfläche $= 3 \times 2 = 6$ m.; mittlere Höhe (nach a) $= 9$ m.; daher der Mantel $= 6 \times 9 = 54$ □m.

Zweites Beispiel. In einem schief abgeschnittenen Prisma mit quadratischer Grundfläche von 2 m. Seitenlänge, haben die Seitenkanten der Reihe nach eine Länge von 9, 10, 11 und 12 m. Wie groß ist a. der Kubikinhalt; b. der Mantel?

a. Grundfläche $= 2 \times 2 = 4$ □m.

Mittlere Höhe $= \dfrac{9 + 10 + 11 + 12}{4} = {}^{21}/_{2}$ m.

Daher der Kubikinhalt $= \dfrac{4 \times 21}{2} = 2 \times 21 = 42$ ⊞m.

b. Umfang der Grundfläche $= 4 \times 2 = 8$ m. Mittlere Höhe $= {}^{21}/_{2}$ m.

Daher der Mantel $= \dfrac{8 \times 21}{2} = 4 \times 21 = 84$ □m.

Uebungsaufgaben. In einem schief abgeschnittenen Prisma, dessen

sind gegeben:

	Grundfläche.	die Grundkante.	die Höhen.
291.	ein regul. Dreieck	2 m.	4,5, 6, m.
292.	„ „ Viereck	3 „	7,7, 8, 8, „
293.	„ „ „	4 „	9,9,10,10, „
294.	„ „ „	5 „	8,9,10,11, „
295.	„ „ Dreieck	6 „	8,8,11, „

Gesucht:

Kubikinhalt.	Mantel.
8,66 cbm.	30 □m.
67,50 „	90 „
152,00 „	152 „
237,50 „	190 „
140,292 „	162 „

§ 23.

Die Walze, der Cylinder oder die runde Säule.

1. Die Walze oder der Cylinder hat zwei gleiche und parallele Kreise (Ellipsen, Ovale) zu Grundflächen und eine einzige krumme Seitenfläche, Mantel genannt. Der senkrechte Abstand beider Grundflächen heißt Höhe. Eine Seite des Cylinders ist jede gerade Linie, die von Grundfläche zu Grundfläche auf dem Mantel gezogen werden kann. Stehen alle Seiten senkrecht auf der Grundfläche, so ist der Cylinder ein senkrechter, dessen Höhe gleich der Seite ist. Im schiefen Cylinder ist die Höhe kleiner als die Seite. Am meisten in Betracht kommt der gemeine Cylinder, dessen Grundflächen Kreise sind. Außerdem gibt es noch elliptische und ovale Cylinder, welche Ellipsen, bezüglich Ovale zu Grundflächen haben.

2. Die Walze läßt sich als ein Prisma von unendlich vielen Seiten betrachten, und ist daher ebenfalls ihr Kubikinhalt ein Produkt aus Grundfläche und Höhe, und ihr Mantel ein Produkt aus Umfang und Höhe.

Beispiel. Eine 32 m. hohe Säule (gemeiner Cylinder) hat zur Grundfläche einen Kreis, dessen Radius $1\frac{3}{4}$ m. beträgt. Es soll ihr Kubikinhalt und ihr Mantel gefunden werden. ($\pi = \frac{22}{7}$.)

a. Grundfläche $= 1\frac{3}{4} \times 1\frac{3}{4} \times \frac{22}{7} = \frac{7 \times 7 \times 22}{4 \times 4 \times 7}$
$= \frac{7 \times 11}{4 \times 2} = \frac{77}{8}$ □m.

Kubikinhalt $= 32 \times \frac{77}{8} = 4 \times 77 = 308$ ⧉m.

b. Durchmesser $= 2 \times 1\frac{3}{4} = \frac{2 \times 7}{4} = \frac{7}{2}$ m.

Umfang der Grundfläche $= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} = 11$ m.
Mantel $= 32 \times 11 = 352$ □m.

Uebungsaufgaben. In einem Cylinder ist

	Gegeben:		Gesucht:	
	Radius.	Höhe.	Kubikinhalt.	Mantel.
296.	$3\frac{1}{2}$ m.	12 m.	462 ⧉m.	264 □m.
297.	$5\frac{1}{4}$ „	24 „	2079 „	792 „
298.	7 „	10 „	1540 „	440 „
299.	$1\frac{3}{4}$ „	16 „	154 „	176 „
300.	$2\frac{5}{8}$ „	32 „	693 „	528 „

Anmerk. 1. Vorstehende Aufgaben sind auch derartig zu benutzen, daß man

a. den Kubikinhalt und die Höhe
b. den Kubikinhalt und den Radius
c. den Mantel und die Höhe
d. den Mantel und den Radius

} als gegeben betrachtet.

Anmerk. 2. Wird der Kubikinhalt eines Cylinders durch den Mantel desselben dividirt, so findet sich der halbe Radius der Grundfläche. So ist z. B. nach Aufgabe 296 der Kubikinhalt eines senkrechten Cylinders = 462 ⧉m. bei 264 □m. Seitenfläche; und daher die Hälfte des Radius der Grundfläche $= \frac{462}{264}$ oder $\frac{7}{4}$ m., mithin der Radius $= \frac{2 \times 7}{4} = \frac{7}{2}$ oder $3\frac{1}{2}$ m.

Aus dem Mantel und dem Radius ergiebt sich aber nun auch die Höhe; denn beträgt der Radius $3\frac{1}{2}$ m.; so ist der Durchmesser = 7 m., folglich der Umfang der Grundfläche $= 7 \times \frac{22}{7}$ m. und daher die Körperhöhe $= \frac{264}{22} = 12$ m. (Es ist nämlich die Höhe $= \frac{\text{Mantel}}{\text{Umfang der Grundfläche}}$.)

3. Um die Körpermasse einer Röhre zu berechnen, hat man den innerhalb fehlenden Cylinder von dem ausgefüllt gedachten Cylinder zu subtrahiren. Soll der Rauminhalt cylinderförmiger Gefäße (Wannen, Bottiche, Bassins) berechnet werden, so messe man Durchmesser und Höhe im Lichten und verfahre dann wie oben.

Erstes Beispiel. Eine 7 m. lange Röhre mit 1 cm. Wandstärke hat im Lichten einen Durchmesser von 12 cm. Wie viel Holz enthält diese Röhre?

Die ausgefüllt gedachte Röhre hat einen Durchmesser von $12 + 1 + 1 = 14$ cm., also einen Radius von $^{14}/_{2} = 7$ cm., bei 700 cm. Länge; demnach ist ihr Kubikinhalt $= 7 \times 7 \times {}^{22}/_{7} \times 700 = 7 \times 22 \times 700 = 107800$ □cm.

Der innerhalb befindliche Luft-Cylinder hat einen Durchmesser von 12 cm., also einen Radius von $^{12}/_{2} = 6$ cm., bei 700 cm. Länge; daher ist sein Kubikinhalt $= 6 \times 6 \times {}^{22}/_{7} \times 100 = 79200$ □cm.

Demgemäß enthält die Röhre $107800 - 79200 = 28600$ □cm. $= 0{,}028600$ oder $0{,}0286$ □m. Holz.

Anmerk. Jede Röhre ist hinsichtlich der Körpermasse gleich einem Cylinder, der bei derselben Länge resp. Höhe, den Kreisring der ersteren zur Grundfläche hat. Die beiden Radien des Kreisringes im obigen Beispiel betragen 6 cm. und 7 cm. Mithin ist der Inhalt dieses Kreisringes $= (7^2 - 6^2) \times {}^{22}/_{7} = (49 - 36) \times {}^{22}/_{7} = \frac{13 \times 22}{7}$ cm. Da die Länge der Röhre 700 cm. beträgt, so ergiebt sich hieraus die Körpermasse der Röhre $= \frac{13 \times 22 \times 700}{7} = 13 \times 22 \times 100 = 28600$ □cm.

Uebungsaufgaben. Von einem (an beiden Enden offenen) hohlen Cylinder, dessen Länge 14 m. beträgt, ist

	Gegeben:		Gesucht:
	Wandstärke.	Durchmesser im Lichten.	Körpermasse.
301.	1 cm.	19 cm.	0,0880 □m.
302.	1 „	26 „	0,1188 „
303.	$1^1/_2$ „	25 „	0,1749 „
304.	$1^1/_2$ „	11 „	0,0825 „
305.	2 „	25 „	0,2288 „

Zweites Beispiel. Wie viel Hektoliter faßt ein kreisrundes Bassin von 7 m. Durchmesser und 2 m. Tiefe?

Der Radius beträgt $^7/_2$ m., daher die Grundfläche $^7/_2 \times {}^7/_2 \times {}^{22}/_7 = \frac{7 \times 11}{2}$ □m. Da die Tiefe = 2 m. ist, so faßt das Bassin $\frac{7 \times 11}{2} \times 2 = 7 \times 11 = 77$ ⧈m., oder (weil 1 ⧈m. = 10 Hektoliter ist) $77 \times 10 = 770$ Hl.

Uebungsaufgaben. Von einem cylinderförmigen Wasserbehälter ist

Gegeben:		Gesucht:
Durchmesser.	Tiefe.	Rauminhalt in Hl. od. l.
306. 1 m.	$3^1/_2$ m.	$27^1/_2$ Hl.
307. 2 „	7 „	220 „
308. $2^1/_2$ „	14 „	$687^1/_2$ „
309. 28 „	$2^1/_2$ „	154 l.
310. 42 „	2 „	$277^1/_5$ „

Drittes Beispiel. Eine ellipsenförmige Wanne von 84 cm. Tiefe hat im Lichten Hauptdurchmesser von $1^3/_4$ m. und $^4/_5$ m. Wie viel Liter Wasser kann sie fassen?

Der Längendurchmesser der Grundfläche beträgt $1^3/_4$ m. = 175 cm., also die Längenachse $^{175}/_2$ cm. Ferner ist der Breitendurchmesser der Grundfläche = $^4/_5$ m. oder 80 cm., daher die halbe Breitenachse = $^{80}/_2$ oder 40 cm. Hiernach beträgt der Inhalt der Grundfläche $^{175}/_2 \times 40 \times {}^{22}/_7 = 25 \times 20 \times 22 = 11000$ ⧈cm. = 11 ⧈dm. welche 11 Liter ergeben.

Uebungsaufgaben. Von einem cylindrischen Gefäße mit elliptischer Bodenfläche ist

Gegeben:			Gesucht:
Erste Achse.	Zweite Achse.	Tiefe.	Rauminhalt i. Hl. od. l.
311. 3 m.	1 m.	$1^3/_4$ m.	$41^1/_4$ Hl.
312. 4 „	2 „	$3^1/_2$ „	220 „
313. 1 „	56 cm.	2 „	$8^4/_5$ „
314. $1^1/_2$ „	84 „	1 „	$9^9/_{10}$ „
315. 70 cm.	42 „	30 cm.	$69^3/_{10}$ l.

4. Der Kubikinhalt und der Mantel eines schief abgeschnittenen senkrechten Cylinders ist in bekannter Weise (§ 22 Nr. 4) leicht gefunden, wenn man sich letzteren in einen andern Cylinder verwandelt denkt, welcher bei derselben Grundfläche die halbe Summe der größten und kleinsten Seitenlinie zur Höhe hat.

Beispiel. In einem schief abgeschnittenen senkrechten Cylinder von 2 m. Durchmesser beträgt die kleinste Seitenlinie $6\frac{1}{2}$ m., die größte aber $7\frac{1}{2}$ m. Es soll a. der Kubikinhalt; b. der Mantel gefunden werden.

a. Mittlere Höhe $= \frac{6\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2}}{2} = {}^{14}/_{2} = 7$m.; Radius $= {}^{2}/_{2} = 1$ m. Grundfläche $= 1 \times 1 \times {}^{22}/_{7} = {}^{22}/_{7}$ □m. Demnach der Kubikinhalt $= {}^{22}/_{7} \times 7 = 22$ ⊡m.

b. Umfang der Grundfläche $= 2 \times {}^{22}/_{7} = {}^{44}/_{7}$ m. Mittlere Höhe $= 7$ m. Folglich der Mantel $= {}^{44}/_{7} \times 7 = 44$ □m.

Anmerk. In derselben Weise wird bei der Berechnung schief abgeschnittener Röhren verfahren.

Uebungsaufgaben. In einem an der Deckseite schief abgeschnittenen senkrechten Cylinder ist

Gegeben:			Gesucht:	
Größte Höhe.	Kleinste Höhe.	Radius.	Kubikinhalt.	Mantel.
316. 64 cm.	60 cm.	7 cm.	9548 ⊡cm.	2728 □cm.
317. 56 „	54 „	14 „	33880 „	4840 „
318. 78 „	62 „	17 „	63580 „	7480 „
319. 84 „	80 „	28 „	202048 „	14432 „
320. 91 „	84 „	21 „	121275 „	11550 „

5. Unter allen geschlossenen (senkrechten) Cylindern von gleicher Größe hat derjenige die **kleinste** Oberfläche, bei welchem die Höhe eben so groß ist als der Durchmesser der Grundfläche.

Beispiel. Es sollen zwei Blechbüchsen, jede von 2156 ⊡cm. Inhalt angefertigt werden, und zwar die eine mit 14 cm., die ander mit 50 cm. Höhe.

a. Wie viel betragen die Durchmesser ihrer Grundflächen?
b. Wie groß ist die Gesammtoberfläche jeder einzelnen Blechbüchse?

a. Da der Kubikinhalt, durch die Höhe dividirt, den Inhalt der Grundfläche ergiebt, so findet sich

für die 14 cm. hohe Blechbüchse

die Grundfläche = $^{2156}/_{14}$ oder 154 □cm., das Quadrat des Radius $= \frac{154 \times 7}{22}$ oder $7 \times 7 = 49$ □cm., der Radius $= \sqrt{49} = 7$ cm., der Durchmesser $= 2 \times 7 = 14$ cm.;

für die 56 cm. hohe Blechbüchse

die Grundfläche = $^{2156}/_{56} = {}^{77}/_2$ □cm., das Quadrat des Radius $= \frac{77 \times 7}{2 \times 22} = \frac{7 \times 7}{2 \times 2} = {}^{49}/_4$ □cm., der Radius $= \sqrt{^{49}/_4} = {}^7/_2$ cm. der Durchmesser $= 2 \times {}^7/_2 = 7$ cm.

b. Bei der 14 cm. hohen Blechbüchse

die Grundfläche	= 154 □cm.
die Deckfläche	= 154 „
der Mantel = $14 \times {}^{22}/_7 \times 14$	= 616 „
die ganze Oberfläche	= 924 □cm.

Bei der 56 cm. hohen Blechbüchse ist

die Grundfläche	= $38^1/_2$ □cm.
die Deckfläche	= $38^1/_2$ „
der Mantel = $7 \times {}^{22}/_7 \times 56$	= 1232 „
die ganze Oberfläche	= 1309 □cm.

Uebungsaufgaben. In einem geschlossenen Cylinder von 17248 Kubik-cm. ist

Gegeben: Höhe.	Gesucht: Durchmesser.	Oberfläche.
321. 28 cm.	28 cm.	3696 □cm.
322. 112 „	14 „	5236 „
323. 7 „	56 „	6160 „

6. Unter allen geschlossenen Cylindern von gleicher Oberfläche ist derjenige der größte, dessen Höhe dem Durchmesser der Grundfläche gleich ist.

Von zwei geschlossenen Cylindern ist der eine 14 cm. hoch bei 14 cm. Durchmesser, der andere $18\frac{1}{2}$ cm. hoch bei 12 cm. Durchmesser. Welche Oberfläche und welchen Kubikinhalt hat jeder der beiden Cylinder?

Der erste Cylinder hat

$7 \times 7 \times {}^{22}/_{7} \times 14 = 2156$ ⧉cm. körperlichen Inhalt.

Es beträgt

seine Grundfläche $7 \times 7 \times {}^{22}/_{7} = 154$ □cm.
seine Deckfläche $= 154$ „
sein Mantel $14 \times {}^{22}/_{7} \times 14 = 616$ „
mithin die ganze Oberfläche $= 924$ □cm.

Im zweiten Cylinder ist

die Grundfläche $= 6 \times 6 \times {}^{22}/_{7} = 113{}^{1}/_{7}$ □cm.
die Deckfläche $= 113{}^{1}/_{7}$ „
der Mantel $= 12 \times {}^{22}/_{7} \times {}^{37}/_{2} = 697{}^{5}/_{7}$ „
die ganze Oberfläche 924 □cm.;
ferner der Kubikinhalt $= 6 \times 6 \times {}^{22}/_{7} \times {}^{37}/_{2} =$ $2093{}^{1}/_{7}$ ⧉cm.

Demgemäß ist bei gleicher Oberfläche der erste Cylinder $2156 - 2093{}^{1}/_{7} = 62{}^{6}/_{7}$ ⧉cm. größer als der zweite Cylinder.

Anmerk. In jedem geschlossenen Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe gleich sind, ergiebt sich eine der genannten Ausdehnungen, wenn man das sechsfache Volumen durch die Gesammt-Oberfläche dividirt; z. B. in Aufg. 321:

Durchmesser oder Höhe $= \frac{6 \times 17448}{3696} = \frac{17248}{616} = 28$ cm.

7. Unter allen cylindrischen Hohlmaßen von gleichem Rauminhalte (und gleicher Wandstärke) hat dasjenige die kleinste Oberfläche (d. i. Summe der Grundfläche und des Mantels), in welchem die Höhe ebenso groß ist als der Radius der Grundfläche.

Beispiel. Zwei cylindrische Hohlmaße enthalten jedes 8624 ⊞cm. Der Radius des einen beträgt 14 cm., derjenige des andern hingegen 7 cm. Welchen Inhalt ergeben bei jedem dieser beiden Hohlmaße Grundfläche und Mantel zusammengenommen?

Erstes Hohlmaß.

Grundfläche $= 14 \times 14 \times {}^{22}/_{7} = 616$ □cm.; Höhe $= {}^{8624}/_{616} = 14$ cm.; Durchmesser $= 2 \times 14 = 28$ cm.; Mantel $= 28 \times {}^{22}/_{7} \times 14 = 28 \times 44 = 1232$ □cm.; daher die gesuchte Oberfläche (d. i. Grundfläche + Mantel) $= 616 + 1232 = 1848$ □cm.

Zweites Hohlmaß.

Grundfläche $= 7 \times 7 \times {}^{22}/_{7} = 154$ □cm.; Höhe $= {}^{8624}/_{54} = 55$ cm.; Durchmesser $= 2 \times 7 = 14$ cm.; Mantel $= 14 \times {}^{22}/_{7} \times 56 = 2464$ □cm.; daher Grundfläche + Mantel $= 154 + 2464 = 2618$ □cm.

Die Oberfläche des ersten Hohlmaßes ist demgemäß $2618 - 1848 = 770$ □cm. kleiner als diejenige des zweiten Hohlmaßes.

Uebungsaufgaben. In einem oben offenen Cylinder, welcher 10780 Hl. faßt, ist

	Gegeben:	Gesucht:	
	Durchmesser.	Höhe.	Oberfläche.
324.	14 m.	7 m.	462 m.
325.	28 „	$1^{3}/_{4}$ „	770 „
326.	7 „	28 „	$654^{1}/_{2}$ „

8. Unter allen cylindrischen Hohlmaßen von gleicher Oberfläche (und gleicher Wandstärke) ist dasjenige am größten, in welchem die Höhe mit dem Radius der Grundfläche übereinstimmt.

Beispiel. Von zwei cylindrischen Hohlmaßen hat das eine 28 cm. Höhe, wie auch im Radius, das andere 77 cm. Höhe bei einem Radius von 14 cm. Wie viel beträgt bei jedem von ihnen der Kubikinhalt, sowie die Oberfläche (ohne Oeffnung)?

Erstes Hohlmaß.

Grundfläche $= 28 \times 28 \times {}^{22}/_{7} = 28 \times 88 = 2464$ □cm.
Mantel $= 56 \times {}^{22}/_{7} \times 28 = 56 \times 88 = 4928$ „
Oberfläche $= 7392$ □cm.
Kubikinhalt $= 2464 \times 28 = 68992$ ⧆cm.

Zweites Hohlmaß.

Grundfläche $= 14 \times 14 \times {}^{22}/_{7} = 14 \times 44 = 616$ □cm.
Mantel $= 28 \times {}^{22}/_{7} \times 77 = 28 \times 22 \times 11 = 6776$ „
Oberfläche $= 7392$ □cm.
Kubikinhalt $= 616 \times 77 = 47432$ ⧆cm.

Demgemäß enthält bei gleicher Oberfläche das erste Hohlmaß $68992 - 47432 = 21560$ ⧆cm. mehr als das zweite Hohlmaß.

Anmerk. In jedem cylindrischen Hohlmaße (ohne Deckel), dessen Höhe mit dem Radius der Grundfläche übereinstimmt, wird dieser Radius oder die erwähnte Höhe gefunden, wenn man den dreifachen Rauminhalt durch die Summe der Grundfläche und des Mantels dividirt. So ist im obigen Beispiel bei 68992 ⧆cm. körperlichem Inhalt und 7392 □cm. Oberfläche der Radius der Grundfläche, resp. die Körperhöhe =

$$\frac{3 \times 68992}{7392} = \frac{68992}{2464} = 28 \text{ cm.}$$

§. 24.

Die Pyramiden oder die eckigen Spitzsäulen.

1. Die Pyramiden sind eckige Körper, welche oben in eine Spitze auslaufen. Sie haben daher nur eine einzige Grundfläche, die ein Drei-, Vier- oder Vieleck sein kann. Die senkrechte Linie, von der Spitze auf die Grundfläche oder deren Verlängerung gezogen, heißt die Höhe der Pyramide. Ist die Grundfläche eine im Kreise beschriebene geradlinige Figur, und trifft die Höhe genau in den Mittelpunkt dieser Figur, so ist die Pyramide eine gleichseitige oder rechtwinklige. Die gleichseitige Pyramide wird eine regelmäßige genannt, wenn ihre Grundfläche zugleich eine regelmäßige Figur ist. Die

Seitenflächen der regelmäßigen Pyramide sind lauter congruente und gleichschenklige Dreiecke.

2. Jede Pyramide ist ihrer Größe nach gleich dem dritten Theil ihres Prisma, d. i. desjenigen Prisma, mit dem sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat. Demnach wird der Kubikinhalt einer Pyramide gefunden, wenn man die Grundfläche derselben mit der Höhe multiplicirt und das erhaltene Produkt durch 3 dividirt. Das Dreifache des Kubikinhalts durch die Höhe dividirt, ergiebt die Grundfläche, und durch die Grundfläche dividirt, die Maßzahl der Höhe.

Erstes Beispiel. In einer regelmäßigen Pyramide, deren Grundfläche a. ein gleichseitiges Dreieck, b. ein Quadrat, c. ein reguläres Fünfeck, d. ein reguläres Sechseck, e. ein reguläres Achteck ist, beträgt die Höhe 18 m. und die Länge jeder Grundkante 4 m. Welchen Kubikinhalt hat jede dieser Pyramiden?

a. Nach § 9 ist die Grundfläche $= 4 \times 4 \times 0,433 =$ 6,928 □m., daher der Kubikinhalt $= {}^{18}/_{3} \times 6,928 =$ $6 \times 6,928 = 41,568$ ⧉m.

b. Grundfläche $= 4 \times 4 = 16$ □m., Kubikinhalt $= {}^{18}/_{3}$ $\times 16 = 6 \times 16 = 96$ ⧉m.

c. Nach § 11 ist die Grundfläche $= 4 \times 4 \times 1,7205 =$ 27,528 □m., daher der Kubikinhalt $= {}^{18}/_{3} \times 27,528$ $= 6 \times 27,528 = 165,168$ ⧉m.

d. Nach § 11 ist die Grundfläche $= 4 \times 4 \times 2,598 =$ 21,568 □m., daher der Kubikinhalt $= {}^{18}/_{3} \times 41,568$ $= 6 \times 41,568 = 249,408$ ⧉m.

e. Nach § 11 ist die Grundfläche $= 4 \times 4 \times 4,8284 =$ 77,2544 □m., daher der Kubikinhalt $= {}^{18}/_{3} \times 78,2544$ $= 6 \times 77,2544 = 463,5264$ ⧉m.

Uebungsaufgaben.

Gegeben:			Gesucht:
regelm. Pyramide.	Grundkante.	Höhe.	Kubikinhalt.
327. dreiseitige	10 m.	30 m.	433 ⧉m.
328. vierseitige	9 „	30 „	810 „
329. fünfseitige	8 „	30 „	1101,12 „

Uebungsaufgaben.

	Gegeben:		Gesucht:
regelm. Pyramide.	Grundkante.	Höhe.	Kubikinhalt.
330. sechsseitige	7 m.	30 m.	1413,02 ⧆m.
331. achtseitige	6 "	30 "	1738,224 "
332. zehnseitige	5 "	30 "	1923,55 "

Zweites Beispiel. Eine Pyramide von 90 ⧆m. Inhalt ist 10 m. hoch; wie viel beträgt ihre Grundfläche?

$$\frac{3 \times 90}{10} = 3 \times 9 = 27 \ \square\text{m.}$$

Uebungsaufgaben. Von einer Pyramide ist

Gegeben:		Gesucht:
Kubikinhalt.	Höhe.	Grundfläche.
333. 60 ⧆m.	9 m.	20 □m.
334. 84 "	12 "	21 "
335. 110 "	15 "	22 "
336. 138 "	18 "	23 "

Drittes Beispiel. Wie hoch ist eine Pyramide von 84 ⧆m. Inhalt, wenn ihre Grundfläche 12 □m. beträgt?

$$\text{Höhe} = \frac{3 \times 84}{12} = 3 \times 7 = 21 \text{ m.}$$

Uebungsaufgaben. In einer Pyramide ist

Gegeben:		Gesucht:
Kubikinhalt.	Grundfläche.	Höhe.
337. 128 ⧆m.	16 □m.	24 m.
338. 126 "	18 "	21 "
339. 120 "	20 "	18 "
340. 105 "	21 "	15 "

Viertes Beispiel. Eine reguläre vierseitige Pyramide von 128 ⧆m. Inhalt ist 24 m. hoch. Welche Länge hat jede Grundkante?

$$\text{Grundfläche} = \frac{3 \times 128}{24} = {}^{128}/_{8} = 16 \ \square\text{m.}$$ Da die Grundfläche ein Quadrat ist, so beträgt jede Grundkante $\sqrt{16} = 4$ m.

Uebungsaufgaben. In einer regulären Pyramide ist

	Gegeben:		Gesucht:
	Kubikinhalt.	Höhe.	Grundkante.
341.	500 ⧉m.	15	10 m.
342.	484 "	12	11 "
343.	432 "	9	12 "
344.	1014 "	18	13 "
345.	1372 "	21	14 "

Fünftes Beispiel. Eine reguläre achtseitige Pyramide soll 1207,1 ⧉m. Inhalt und 30 m. Höhe haben. Wie lang muß jede Seite der Grundfläche gemacht werden?

Grundfläche $= \frac{3 \times 1207{,}1}{30} = 120{,}71$ □m. Da dies der Inhalt eines regulären Achtecks ist, so ergiebt sich (nach § 11) das Quadrat der Achtecks-Seite (Grundkante), wenn man 120,71 durch 4,8284 dividirt. Hiernach ist das Quadrat der Achtecks-Seite $= \frac{120{,}71}{4{,}8284} = \frac{1207100}{48284} = 25$ □m. und daher diese Seite selbst $= \sqrt{25} = 5$ m.; d. h. jede Seite der Grundfläche muß 5 m. lang gemacht werden.

Uebungsaufgaben.

		Gegeben:		Gesucht:
reguläre Pyramide.		Kubikinhalt.	Höhe.	Grundkante.
346.	dreiseitige	277,120 ⧉m.	30 m.	8 m.
347.	fünfseitige	247,752 "	27 "	4 "
348.	sechsseitige	519,600 "	24 "	5 "
349.	achtseitige	96,568 "	15 "	2 "
350.	zehnseitige	769,420 "	12 "	5 "

3. Der Mantel einer regluären Pyramide ist gleich einem Dreieck, das den Basisumfang (Umfang der Grundfläche) zur Grundlinie und die Seitenhöhe (Höhe eines Seitendreiecks) zur Höhe hat. Die Seitenhöhe verbindet die Spitze der Pyramide mit der Mitte einer Grundkante und steht senkrecht auf derselben, so daß die Seitenhöhe, die halbe Grundkante und die Seitenkante der Pyramide ein rechtwinkliges Dreieck bilden, welches die erwähnte Seitenkante zur Hypotenuse und die beiden

andern Linien zu Katheten hat. Ferner ist in jeder regulären Pyramide die Seitenkante die Hypotenuse eines zweiten rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die Pyramidenhöhe und der Radius des um die Grundfläche beschriebenen Kreises als Katheten auftreten. Der letzterwähnte Radius (r) läßt sich aber mittels der in § 11 Nr. 4 mitgetheilten Tabelle aus der Maßzahl der Seite des regulären Polygons berechnen. Man hat nämlich die Maßzahl der Polygon-Seite durch die entsprechende Verhältnißzahl in der genannten Tabelle zu dividiren, und erhält dadurch sogleich den Radius des um das reguläre Polygon beschriebenen Kreises. So ist z. B. in obiger Tabelle die Seite des regulären Fünfecks $= 1{,}1756 \times$ Radius angegeben. Beträgt nun diese Seite 5 m., so muß der erwähnte Radius (r) $= \frac{5}{1{,}1756} = \frac{50000}{11756}$ $= 4{,}25314 \ldots$ m. sein.

Demgemäß kann die Seitenhöhe einer regulären Pyramide, deren Grundkante und Körperhöhe gegeben ist, durch wiederholte Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes (§ 8) berechnet werden. Der Kürze wegen bezeichnen wir die Grundkante der regulären Pyramide mit a, den Radius des um die Grundfläche beschriebenen Kreises (wie oben) mit r, die Körperhöhe mit h, die Seitenkante mit z, die Seitenhöhe mit x. Dann findet sich

$$z = \sqrt{r^2 + h^2} \text{ oder } z^2 = r^2 + h^2,$$

$$z = \sqrt{x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ oder } z^2 = x^2 + \frac{a^2}{4};$$

Daher ist

$$x^2 + \frac{a^2}{4} = r^2 + h^2,$$

mithin $x^2 = r^2 + h^2 - \frac{a^2}{4}$,

also $x = \sqrt{r^2 + h^2 - \frac{a^2}{4}}$;

d. h. die Seitenhöhe einer regulären Pyramide wird gefunden, wenn man die Summe der Quadrate über dem Radius r und

der Körperhöhe um das Quadrat der halben Grundkante vermindert und aus dem Reste die Quadratwurzel zieht.

Bequemer als die hier angegebene Berechnung der Seitenhöhe ist nachstehendes Verfahren, indem bei letzterem der Pythagoräische Lehrsatz nur ein Mal zur Anwendung kommt.

In jeder regulären Pyramide ist nämlich die Seitenhöhe die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, das die Körperhöhe und den Radius des in die Grundfläche einbeschriebenen Kreises zu Katheten hat. Dieser Radius heißt kleinster Radius, und empfiehlt es sich, nicht diesen Radius selbst, sondern das Quadrat desselben sogleich in die Berechnung einzuführen, und zwar auf Grund der nachstehenden Tabelle. Wird der kleinste Radius mit ρ bezeichnet und im Uebrigen die obige Bezeichnung beibehalten, so findet sich sogleich

$$x^2 = \rho^2 + h^2,$$

$$\text{mithin } x = \sqrt{\rho^2 + h^2}.$$

Das Quadrat des kleinsten Radius beträgt

in der regulären Pyramide		
dreiseit.	$^1/_2$	
vierseit.	$^1/_4$	
fünfseit.	0,47361	
sechsseit.	$^3/_4$	
siebenseit.	1,0698	
achtseit.	1,45711	des Quadrats der Grundkante.
neunseit.	1,88716	
zehnseit.	2,36803	
zwölfseit.	3,48205	
15seit.	5,53338	
18seit.	8,04086	
20seit.	9,96586	

Erstes Beispiel. Eine reguläre dreiseitige Pyramide soll 20 cm. hoch werden und Grundkanten von 6 cm. Länge haben. Wie viel Blech ist zur Anfertigung erforderlich?

Quadrat der Grundkante = 6 × 6 = 36 □cm.
Quadrat des kleinsten Radius = $^{36}/_2$ = 18 □cm.
Quadrat der Pyramidenhöhe = 20 × 20 = 400 „
Quadrat der Seitenhöhe = 418 □ cm.

Seitenhöhe $= \sqrt{418} = 20{,}445$ cm.

Der halbe Basisumfang $= \frac{3 \times 6}{2} = 9$ cm.

daher der Mantel $= 9 \times 20{,}445 = 184{,}005$ □cm.
Hierzu die Gundfläche $= 6 \times 6 \times 0{,}433 = 15{,}588$ "

Oberfläche der Pyramide $= 199{,}593$ □cm.

Es sind also 199,593 □cm. Blech erforderlich.

Zweites Beispiel. Eine reguläre sechsseitige Pyramide von 13 m. Höhe hat Grundkanten von 4 m. Länge. Wie groß ist die Summe ihrer Seitenflächen?

Quadrat der Grundkante $= 4 \times 4 = 16$ □m.
Quadrat des kleinsten Radius $= \frac{3}{4} \times 16 = 12$ "
Quadrat der Körperhöhe $= 13 \times 13 = 169$ "

Quadrat der Seitenhöhe $= 181$

Seitenhöhe $= \sqrt{181} = 13{,}45362$ m.
Der halbe Basisumfang $= 3 \times 4 = 12$ m.,
daher der Mantel $= 12 \times 13{,}45362 = 161{,}4434$ □m.

Uebungsaufgaben.

Gegeben:

Reguläre Pyramide.	Grundkante.	Körper-Höhe.
351. dreiseit.	10 m.	5 m.
352. vierseit.	8 "	6 "
353. fünfseit.	6 "	7 "
354. sechsseit.	4 "	8 "
355. achtseit.	2 "	9 "

Gesucht:

Mantel.	Grundfläche.
129,9 □m.	43,3 □m.
115,3776 "	64 "
121,905 "	61938 "
104,613 "	41568 "
74,502 "	19,3136 "

§ 25.

Der Kegel oder die runde Spitzsäule.

1. Der Kegel hat einen Kreis (auch eine Ellipse oder ein Oval) zur Grundfläche und eine krumme Fläche zum Mantel. Die Grundfläche des gemeinen Kegels ist stets ein Kreis. Als kegelförmige oder conische Körper stellen sich dar: Zuckerhüte, Papierdüten, manche Baumstämme und Thurmspitzen 2c. Alle geraden Linien, welche auf dem Kegelmantel gezogen werden können, vereinigen sich in einem einzigen Punkte, der Spitze des Kegels. Jede gerade Linie, aus der Spitze nach der Umfangslinie der Grundfläche gezogen, heißt Seite oder Seitenlinie des Kegels. Achse wird diejenige gerade Linie genannt, welche die Spitze des Kegels mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet. Im geraden (senkrechten, rechtwinkligen oder gleichseitigen) Kegel steht die Achse senkrecht auf der Grundfläche. Der schiefe Kegel, bei welchem dies nicht der Fall ist, wird auch ein ungleichseitiger genannt.

Anmerk. Unter dem Worte Kegel ist in nachfolgenden Angaben allemal ein gemeiner und gerader Kegel zu verstehen, der überdies am häufigsten in Betracht kommt.

2. Jeder Kegel kann als eine Pyramide von unendlich vielen Seiten gedacht werden, und ist daher der körperliche Inhalt des Kegels ebenfalls gleich dem dritten Theil des Produkts aus Grundfläche und Höhe. Auch ergiebt das Dreifache des Kegelinhalts, durch die Höhe dividirt, die Grundfläche, und durch die Grundfläche dividirt, die Höhe des Kegels.

Erstes Beispiel. Wie groß ist ein 7 m. hoher Kegel, wenn der Radius seiner Grundfläche 2 m. beträgt? ($\pi = {}^{22}/_{7}$.)

$$\text{Grundfläche} = 2 \times 2 \times {}^{22}/_{7} = {}^{88}/_{7} \;\square\text{m.}$$

$$\text{Kubikinhalt} = \frac{7 \times 88}{3 \times 7} = {}^{88}/_{3} = 29^{1}/_{3} \;\text{⊞m.}$$

Uebungsaufgaben. In einem gemeinen Kegel ist

	Gegeben:		Gesucht:
	Radius.	Höhe.	Kubikinhalt.
356.	4 m.	14 m.	$234^{2}/_{3}$ ⊞m.
357.	5 „	21 „	550 „

Gegeben:		Gesucht:
Radius.	Höhe.	Kubikinhalt.
358. 6 m.	28 m.	1056 ⧉m.
359. 7 "	15 "	770 "
360. $3\frac{1}{2}$ "	30 "	385 "

Zweites Beispiel. Ein 15 m. hoher Kegel hat zur Grundfläche eine Ellipse, deren Achsen 7 m. und 4 m. betragen. Wie groß ist sein Kubikinhalt? ($\pi = \frac{22}{7}$.)

Grundfläche $= 7 \times 4 \times \frac{11}{14} = 22$ □m.

Kubikinhalt $= \frac{15}{3} \times 22 = 5 \times 22 = 110$ ⧉m.

Uebungsaufgaben. In einem elliptischen Kegel ist

Gegeben:			Gesucht:
Erste Achse.	Zweite Achse.	Höhe.	Kubikinhalt.
361. $5\frac{3}{5}$ m.	5 m.	12 m.	88 ⧉m.
362. $5\frac{3}{5}$ "	$2\frac{1}{2}$ "	9 "	33 "
363. $8\frac{3}{4}$ "	4 "	18 "	165 "
364. 7 "	6 "	24 "	264 "
365. 10 "	$8\frac{2}{5}$ "	39 "	660 "

Drittes Beispiel. Eine 15 m. hoher Kegel hat 770 ⧉m. Inhalt. Wie viel beträgt der Radius der Grundfläche?

Grundfläche $= \frac{3 \times 770}{15} = \frac{770}{5} = 154$ □m.

Quadrat des Radius $= \frac{154 \times 7}{22} = 7 \times 7 = 49$ □m.

Radius der Grundfläche $= \sqrt{49} = 7$ m.

Uebungsaufgaben. In einem gemeinen Kegel ist

Gegeben:		Gesucht:
Kubikinhalt.	Höhe.	Radius der Grundfl.
366. 550 ⧉m.	21 m.	5 m.
367. 1232 "	24 "	7 "
368. $1877\frac{1}{3}$ "	28 "	8 "
369. 2970 "	35 "	9 "
370. 4400 "	42 "	10 "

Viertes Beispiel. Welche Höhe hat ein 1232 ⊡m. großer Kegel, wenn der Radius der Grundfläche 7 m. beträgt? ($\pi = {}^{22}/_{7}$.)

Grundfläche $= 7 \times 7 \times {}^{22}/_{7} = 7 \times 22 = 154$ □m.

$$\text{Höhe} = \frac{3 \times 1232}{154} = 3 \times 8 = 24 \text{ m.}$$

Uebungsaufgaben. In einem gemeinen Kegel ist

	Gegeben:		Gesucht:
	Kubikinhalt.	Radius.	Höhe.
371.	$192^1/_2$ ⊡m.	$3^1/_2$ m.	15 m.
372.	924 "	7 "	18 "
373.	$2425^1/_2$ "	$10^1/_2$ "	21 "
374.	4928 "	14 "	24 "
375.	$8662^1/_2$ "	$17^1/_2$ "	27 "

3. Der Mantel eines senkrechten Kegels ist gleich einem Dreieck, das die Peripherie der Grundfläche zur Grundlinie und die Seitenlinie des Kegels zur Höhe hat. Die Seitenlinie des Kegels ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches die Kegelhöhe und den Radius der Grundfläche zu Katheten hat.

Beispiel. Wie groß ist a. der Mantel, b. die ganze Oberfläche eines 28 m. hohen Kegels, wenn der Radius der Grundfläche desselben 21 m. beträgt?

a. Seitenlinie des Kegels $= \sqrt{28^2 + 21^2} = \sqrt{784 + 441} = \sqrt{1225} = 35$ m. Die halbe Peripherie des Grundkreises beträgt $21 \times {}^{22}/_{7} = 3 \times 22 = 66$ m., daher der Mantel $35 \times 66 = 2310$ □m.

b. Grundfläche $21 \times 21 \times {}^{22}/_{7} = 21 \times 3 \times 22 = 21 \times 66 = 1386$ □m.; mithin die ganze Oberfläche $= 2310 + 1386 = 3696$ □m.

Anmerk. Wird die Höhe des Kegels mit h, der Radius der Grundfläche mit r, die Seitenlinie des Kegels mit s bezeichnet, so findet sich

$$s = \sqrt{r^2 + h^2},$$

$$\text{der Kegelmantel} = s \cdot r \cdot \pi,$$

$$\text{die Oberfläche des Kegels} = r\pi\,(r + s),$$

$$\text{der Kubikinhalt des Kegels} = \frac{r^2 \cdot \pi \cdot h}{3}.$$

Uebungsaufgaben. In einem senkrechten Kegel ist

	Gegeben:		Gesucht:	
	Höhe.	Radius.	Mantel.	Oberfläche.
376.	21 □m.	$8^3/_4$ m.	$625^5/_8$ □m.	$866^1/_4$ □m.
377.	21 „	28 „	3080 „	5544 „
378.	14 „	$26^1/_4$ „	$2454^3/_8$ „	4620 „
379.	$26^1/_4$ „	21 „	$1963^1/_2$ „	$3349^1/_2$ „
380.	28 „	21 „	2310 „	3696 „

§ 26.

Die Obelisken, namentlich die Pontons und die abgekürzten Pyramiden.

1. Obelisk im weitern Sinne des Worts heißt jeder Körper, welcher zwei parallele geradlinige Grundflächen und lauter Paralleltrapeze zu Seitenflächen hat. Da die beiden Grundflächen des Obelisken von verschiedener Größe sind, so ist auch die Dicke eines solchen Körpers nicht durchweg dieselbe, sondern, von der größeren Grundfläche aus gerechnet, in fortwährender Abnahme begriffen. Der senkrechte Abstand beider Grundflächen ist die Höhe des Obelisken. Jede geradlinige Figur kann die Grundfläche eines Obelisken sein. Ponton (Kasten) wird ein Obelisk genannt, wenn die Grundflächen desselben Rechtecke sind. Eine derartige Form haben z. B. die Bretterkasten der Wagen, welche lose Gegenstände aufnehmen sollen, ebenso Schubkarren und Vorrathskasten. Wird ein Obelisk über seine kleinere Grundfläche hinaus verlängert, so endigt er entweder in eine Kantenlinie oder in eine Spitze. Im ersteren Falle heißt er ein Obelisk im engern Sinne, im letztern aber eine abgekürzte oder abgestumpfte Pyramide. Die abgekürzte Pyramide ist der untere Theil einer Pyramide, welche von einer der Grundfläche parallelen Ebene durchschnitten worden ist. Der obere, abgeschnittene Theil wird Ergänzungspyramide genannt.

Wird ein Obelisk in seiner halben Höhe parallel mit den Grundflächen durchschnitten, so erhält man die mittlere Durch-

schnittsfigur des Obelisken, welche, von der halben Summe dee beiden Grundflächen abgezogen, die Ergänzungsfigur dieser Grundflächen ergiebt.

2. Jeder Obelisk ist seinem Kubikinhalte nach ebenso groß als ein Prisma und eine Pyramide zusammengenommen, welche beide mit dem Obelisken gleiche Höhe haben, und von denen das Prisma die mittlere Durchschnittsfigur, die Pyramide hingegen die Ergänzungsfigur zur Grundfläche hat. Bezeichnet man also den Kubikinhalt eines Obelisken mit V, die Höhe desselben mit h, die mittlere Durchschnittsfigur mit M und die Ergänzungsfigur mit E, so ist

$$V = h \times (M \times {}^1/_3\, E).$$

Unter der Voraussetzung, daß M den Inhalt der mittleren Durschnittsfigur, E den Inhalt der Ergänzungsfigur, A die Länge und B die Breite der Grundfläche, a die Länge und b die Breite der Deckfläche, also $\frac{A + a}{2}$ die mittlere Länge und $\frac{B + b}{2}$ die mittlere Breite der mittleren Durchschnittsfigur, $\frac{A - a}{2}$ die mittlere Länge und $\frac{B - b}{2}$ die mittlere Breite der Ergänzungsfigur bezeichnet, ist der Rauminhalt des Obelisken =

$$V = h \times \left(\left[\frac{A + a}{2} \times \frac{B + b}{2}\right] + {}^1/_3 \left[\frac{A - a}{2} \times \frac{B - b}{2}\right] \right).$$

Beispiel. In einem 2 m. hohen Ponton hat die eine Grundfläche 7 m. Länge und 4 m. Breite, die andere hingegen 5 m. Länge und 2 m. Breite. Wie viel beträgt der Kubikinhalt dieses Pontons?

$$\text{Mittlere Länge} = \frac{7 + 5}{2} = {}^{12}/_2 = 6 \text{ m.}$$

Mittlere Breite $= \frac{4 + 2}{2} = {}^6/_2 = 3$ m.

Daher enthält die mittlere Durchschnittsfigur $6 \times 3 = 18$ □m.

Die Ergänzsungfigur ist

$$\frac{7 - 5}{2} = {}^2/_2 = 1 \text{ m. lang.}$$

$$\frac{4 - 2}{2} = {}^2/_2 = 1 \text{ m. breit.}$$

und enthält daher $1 \times 1 = 1$ □m.

Demgemäß beträgt der Kubikinhalt des Pontons

$$2 \times (18 + {}^1/_3) = 36^2/_3 \text{ ⧉m.}$$

Anmerk. Die Ergänzungsfigur ergiebt sich auch, wenn man die mittlere Durchschnittsfigur von der halben Summe der Grund- und Deckfläche des Pontons subtrahirt. Also nach obigem Beispiel:

Grundfläche $= 7 \times 4 = 28$ □m.
Deckfläche $= 5 \times 2 = 10$ „
zusammen 38 □m.
Halbe Summe der beiden Endflächen $= 19$ „
Hiervon die mittlere Durchschnittsfigur $= 18$ „
Ergänzungsfigur $= 1$ □m.

Uebungsaufgaben. In einem Ponton ist

	Gegeben:					Gesucht:
	Untere		Obere			
	Länge.	Breite.	Länge.	Brteie.	Höhe.	Kubikinhalt.
381.	11 m.	7 m.	9 m.	3 m.	6 m.	304 ⧉m.
382.	10 „	9 „	8 „	5 „	3 „	191 „
383.	9 „	5 „	7 „	4 „	2 „	$72^1/_3$ „
384.	8 „	6 „	4 „	2 „	5 „	$126^2/_3$ „
385.	7 „	4 „	5 „	2 „	4 „	$73^1/_3$ „

3. Kommt es nicht auf große Genauigkeit an, so kann man bei Berechnung des Kubikinhalts eines Pontons die Ergänzungsfigur unbeachtet lassen, und ist alsdann der Ponton gleich einem ebenso hohen Prisma, welches die mittlere Durchschnittsfigur zur Grundfläche hat.

Eine andere Näherungs-Berechnung besteht darin, daß man den Ponton als ein ebenso hohes Prisma betrachtet, welches

die halbe Summe der Grund- und Deckfläche des Pontons zur Grundfläche hat.

Bei dem ersteren Verfahren ergiebt sich ein kleineres, bei dem zweiten hingegen ein größeres Resultat; jedoch ist der obwaltende Unterschied im ersten Falle nur halb so groß als im zweiten Falle.

Beispiel: Ein 3 m. hoher Obelisk ist unten 10 m. lang und 9 m. breit, oben 8 m. lang und 5 m. breit. Wie viel beträgt annähernd sein Kubikinhalt?

Der Kubikinhalt beträgt genau

$$3 \times \left(\left[\frac{10+8}{2} \times \frac{9+5}{2}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{10-8}{2} \times \frac{9-5}{2}\right]\right) =$$

$$3 \times \left([9 \times 7] + \frac{1 \times 2}{3}\right) = 3 \times 63\tfrac{2}{3} = 191 \text{ □m.}$$

Als Prisma auf der mittleren Durchschnittsfigur enthält der Ponton $3 \times 63 = 189$ □ m., also 2 □m. weniger, als die genaue Berechnung ergiebt.

Als Prisma auf der halben Summe der gegebenen Grund- und Deckfläche enthält der Ponton $\frac{(10 \times 9) + (8 \times 5)}{2} \times 3 = \frac{90 + 40}{2} \times 3 = 65 \times 3 = 195$ □m., d. i. 4 □m. mehr als durch genaue Berechnung gefunden worden ist.

Anmerk. Der Schüler berechne hiernach die in Aufg. 381 bis 385 angegebenen Obelisken.

in Aufg.	Es ergiebt sich annähernd ein Kubikinhalt von		
381.	300 □m.	oder	312 □m.
382.	189 „	„	195 „
383.	72 „	„	78 „
384.	120 „	„	140 „
385.	72 „	„	76 „

4. Ist der Obelisk zugleich eine abgekürzte Pyramide, so kann die Berechnung seines Kubikinhalts auch in anderer Weise erfolgen, nämlich wie folgt.

a. Jede abgekürzte Pyramide ist gleich dem Unterschiede, der sich ergiebt, wenn man die Ergänzungs-Pyramide von der ergänzten Pyramide subtrahirt.

Bei diesem Verfahren muß zunächst die Höhe der Ergänzungspyramide berechnet werden. Diese Höhe findet sich aber, wenn man die Höhe der abgekürzten Pyramide mit der Maßzahl einer Deckkante multiplicirt und das Produkt durch die Differenz der homologen (d. i. gleichliegenden) Grundkante und der vorerwähnten Deckkante dividirt. Es steht nämlich der Unterschied der Grundkante und der gleichliegenden Deckkante der abgekürzten Pyramide zu der erwähnten Deckkante in demselben Verhältniß wie die Höhe des abgekürzten Körpers zur Höhe der Ergänzungspyramide. Aus der soeben gefundenen Höhe der Ergänzung und der Deckfläche des abgekürzten Körpers ergiebt sich aber in bekannter Weise die Größe der Ergänzungspyramide. Die in Betracht kommende ergänzte Pyramide, welche auf der Grundfläche des abgekürzten Körpers steht, hat die Summe aus der Höhe dieses Körpers und der Höhe der Ergänzung zur Höhe.

Es sei z. B. der Kubikinhalt einer 6 m. hohen abgekürzten Pyramide zu berechnen, welche quadratische Grundflächen von 6 m. und 3 m. Seitenlänge hat.

Wird hier die Höhe der Ergänzungspyramide mit x bezeichnet, so findet sich nach Obigem:

$$5 - 3 : 3 = 6 : x,$$
oder $$2 : 3 = 6 : x,$$
d. i. $$1 : 3 = 3 : x;$$
daher $$x = 3 \times 3 = 9 \text{ m.}$$

Es hat also die Ergänzungspyramide eine Höhe von 9 m., während ihre Grundfläche ein Quadrat von 3 m. Seitenlänge ist. Mithin beträgt der körperliche Inhalt dieser Pyramide

$$\frac{3 \times 3 \times 9}{3} = 27 \text{ □m.}$$

Die ergänzte Pyramide, welche auf einem Quadrat von 5 m. Seitenlänge ruht, hat eine Höhe von 6 + 9 = 15 m. und daher einen Kubikinhalt von $\frac{5 \times 5 \times 15}{3} = 125$ □m.

Demgemäß enthält die in obiger Aufgabe erwähnte abgekürzte Pyramide 125 — 27 = 98 ⧉ m.

Als Obelisk (nach Nr. 2) betrachtet, enthält der gegebene Körper ein 6 m. hohes Prisma mit quadratischer Grundfläche von $\frac{5+4}{2} = 4$ m. Seitenlänge und eine 6 m. hohe Pyramide mit quadratischer Grundfläche von $\frac{5-3}{2} = 1$ m. Seitenlänge. Hiernach ist der Kubikinhalt der abgekürzten Pyramide $= 6\,(4^2 - \frac{1}{3}\,.\,1^2) = 6\,(16 + \frac{1}{3}) = 96 + 2 = 98$ ⧉ m., welches Resultat mit dem vorhin gefundenen übereinstimmt.

b. Jede abgekürzte Pyramide ist gleich der Summe dreier ebenso hohen spitzen Pyramiden, von denen die eine die Grundfläche, die zweite die Deckfläche des abgekürzten Körpers, die dritte die mittlere Proportionalgröße dieser beiden Flächen zur Grundfläche hat.

Wird demnach der körperliche Inhalt der abgekürzten Pyramide mit V, ihre Höhe mit h, die Grundfläche mit G und die Deckfläche mit g bezeichnet, so findet sich

$$V = \frac{h}{3}(G + g + \sqrt{G\,g}).$$

Erstes Beispiel. Eine 6 m. hohe abgekürzte Pyramide mit quadratischen Endflächen hat in der Grundfläche 5 m., in der Deckfläche 3 m. Seitenlänge. Wie viel beträgt ihr Kubikinhalt?

Grundfläche	$= 5 \times 5 =$	25 □ m.
Deckfläche	$= 3 \times 3 =$	9 □ m.
Mittlere Proportionalgröße dieser beiden Flächen	$= \sqrt{25\,.\,9} = 5\,.\,3 =$	15 □ m.
	zusammen	49 □ m

Kubikinhalt $= \frac{6}{3} \times 49 = 2 \times 49 = 98$ ⧉ m.

Zweites Beispiel. Eine dreiseitige abgestumpfte Pyramide von 12 m. Höhe hat zur Grundfläche ein Dreieck von 8 m. Grundlinie und 4 m. Höhe, zur Deckfläche ein Dreieck von 6 m. Grundlinie und 3 m. Höhe. Wie viel beträgt der Kubikinhalt dieses Körpers?

Hier ist h = 12 m.

$$G = \frac{8 \times 4}{2} = \qquad 16 \; \square\text{m}.$$

$$g = \frac{6 \times 3}{2} = \qquad 9 \;\text{"}$$

$$\sqrt{Gg} = \sqrt{16 \,.\, 9} = 4 \times 3 = 12 \;\text{"}$$

$$G + g + \sqrt{Gg} = \qquad 37 \; \square\text{m}.$$

Es beträgt also der gesuchte Kubikinhalt $^{12}/_{3} \times 37 = 4 \times 37 = 148$ ⊞m.

Nach dem in Nr. 2 mitgetheilten Verfahren findet sich:

Mittlere Durchschnittsfigur:

Grundlinie des Dreiecks $= \frac{8+6}{2} = {}^{14}/_{2} = 7$ m.

Höhe des Dreiecks $= \frac{4+3}{2} = {}^{7}/_{2} = 3^{1}/_{2}$ m.

Inhalt des Dreiecks $= {}^{1}/_{2}\,(7 \times 3^{1}/_{2}) = \frac{7 \times 7}{2 \times 2} = {}^{49}/_{4}$ □m.

Ergänzungsfigur:

Grundlinie des Dreiecks $= \frac{8-6}{2} = {}^{2}/_{2} = 1$ m.

Höhe des Dreiecks $= \frac{4-3}{2} = {}^{1}/_{2}$ m.

Inhalt des Dreiecks $= {}^{1}/_{2}\,(1 \times {}^{1}/_{2}) = {}^{1}/_{4}$ □m.

Demgemäß enthält die abgekürzte Pyramide

$$12 \times \left({}^{49}/_{4} + \frac{1 \times 1}{3 \times 4}\right) = 12 \times ({}^{49}/_{4} + {}^{1}/_{12}) = 147 + 1$$

= 148 ⧆m., welches Resultat sich auch bei dem obigen Verfahren ergeben hat.

Drittes Beispiel. In einer 15 m. hohen abgekürzten Pyramide von regelmäßig-dreiseitiger Form hat die Grundfläche 5 m., die Deckfläche 3 m. Seitenlänge. Wie viel beträgt der körperliche Inhalt?

Hier ist h = 15 m.

$$\begin{aligned} G &= 5 \times 5 \times 0{,}433 = 25 \times 0{,}433 \;\square\text{m.},\\ g &= 3 \times 3 \times 0{,}433 = 9 \times 0{,}433 \quad \text{"}\\ \sqrt{Gg} &= 5 \times 3 \times 0{,}433 = 15 \times 0{,}433 \quad \text{"}\\ \hline G + g + \sqrt{Gg} &= 49 \times 0{,}433 \quad \text{"}\ ; \end{aligned}$$

der Kubikinhalt = $^{15}/_3 \times 49 \times 0{,}433 = 245 \times 0{,}433 =$ 106,085 ⧆m.

Um nun zur Bestätigung des Resultats auch das in Nr. 2 mitgetheilte Rechnungsverfahren anwenden zu können, muß zunächst das Verhältniß der mittleren Durchschnittsfigur und der Ergänzungsfigur zur Grund- oder Deckfläche bestimmt werden. Es stehen aber die gleichliegenden Seiten der Grundfläche, der mittleren Durchschnittsfigur und der Ergänzungsfigur in dem Verhältniß von

$$5 : \frac{5+3}{2} : \frac{5-3}{2}\,.$$

$$\text{oder } 1 : \frac{5+3}{5 \times 2} : \frac{5-3}{5 \times 2}\,.$$

$$\text{d. i. } 1 : {}^{8}/_{10} : {}^{2}/_{10}$$

Die Quadrate dieser Zahlen bezeichnen das Verhältniß, in welchem die Inhalte der Grundfläche (G), der mittleren Durchschnittsfigur (M) und der Ergänzungsfigur (E) zu einander stehen. Daher ist

$$G : M : E = 1 : {}^{64}/_{100} : {}^{4}/_{100}$$

und weil die Grundfläche

$$\begin{aligned} G\ \ & 5 \times 5 \times 0{,}433 = 25 \times 0{,}433 \;\square\text{m. enthält:}\\ M &= {}^{64}/_{100} \times 25 \times 0{,}433 = 16 \times 0{,}433 \quad \text{"}\\ E &= {}^{4}/_{100} \times 25 \times 0{,}433 = 1 \times 0{,}433 \quad \text{"} \end{aligned}$$

Hiernach ist der gesuchte Kubikinhalt $= 15 \times (16 \times 0{,}433 + \frac{1}{3} \times 0{,}433) = 15 \times 0{,}433\ (16 + \frac{1}{3}) = 15 \times 16\frac{1}{3} \times 0{,}433 = 245 \times 0{,}433 = 106{,}085$ ⊞m., welches Resultat von dem oben gefundenen nicht abweicht.

Anmerk. Wird bei obiger Bezeichnung die Grundkante der abgekürzten Pyramide = a, die Deckkante = b gesetzt, so ist allgemein:

$$M = G \times \left(\frac{a + b}{2a}\right)^2$$

$$\text{und } E = G \times \left(\frac{a - b}{2a}\right)^2.$$

Viertes Beispiel. Eine 18 m. hohe abgekürzte Pyramide mit regelmäßig-achteckigen Endflächen hat in der Grundfläche 3 m., in der Deckfläche 2 m. Seitenlänge. Wie viel beträgt ihr Kubikinhalt?

Bei dem ersten Verfahren findet sich

die Grundfläche $= 3^2 \times 4{,}8284$ □m.

die Deckfläche $= 2^2 \times 4{,}8284$ „

die mittlere Proportionalgröße $= 3 \times 2 \times 4{,}8284$ □m.

Summe der drei Flächen $(3^2 + 2^2 \times 3 \times 2).\ 4{,}8284 = (9 + 4 + 6) \times 4{,}8284 = 19 \times 4{,}8284 = 91{,}7396$ □m.

Der dritte Theil der Höhe beträgt $\frac{18}{3} = 6$ m., mithin der Kubikinhalt der abgekürzten Pyramide $6 \times 91{,}7396 = 550{,}4376$ ⊞m.

Nach dem zweiten Verfahren ergiebt sich

$G = 3^2 \times 4{,}8284$ □m.

$$M = \left(\frac{3 + 2}{2 \times 3}\right)^2 \times 3^2 \times 4{,}8284 = \frac{25}{36} \times 9 \times 4{,}8285 = \frac{25}{4} \times 4{,}8284 \text{ □m.};$$

$$E = \left(\frac{3 - 2}{2 \times 3}\right)^2 \times 3^2 \times 4{,}8284 = \frac{1}{36} \times 9 \times 4{,}8384 = \frac{1}{4} \times 4{,}8284 \text{ □m.};$$

mithin der gesuchte Kubikinhalt $= 18 \times \left(\frac{25}{4} \times 4{,}8284 + \frac{4{,}8284}{3 \times 4}\right) = 18 \times \frac{1}{4} \times 4{,}8284 \times (25 + \frac{1}{3}) = \frac{18 \times 76 \times 4{,}8284}{4 \times 3} = 6 \times 19 \times 4{,}8284 = 114 \times 4{,}8284$

= 550,4376 □m., d. i. eben so viel als bei dem vorigen Verfahren.

Uebungsaufgaben. In einer abgekürzten regulären Pyramide ist

	Gegeben:			Gesucht:
Grundfläche.	Grundkante.	Deckkante.	Höhe	Kubikinhalt.
386. Quadrat	10 m.	5 m.	21 m.	1225 □m.
387. Quadrat	9 "	4 "	18	798 "
388. Dreieck	8 "	6 "	15	320,42 "
389. Dreieck	7 "	5 "	21	330,379 "
390. Sechseck	6 "	4 "	24	1579,584 "
391. Achteck	5 "	2 "	18	1129,846 "
392. Zehneck	4 "	3 "	15	1423,427 "

5. Wenn ein vierseitiger Obelisk von sechs Trapezen begrenzt wird, d. i. wenn nicht nur seine vier Seitenflächen, sondern auch die Grund- und Deckfläche Trapeze sind, so hat man zunächst die mittlere Länge (die halbe Summe der beiden Parallelen) der trapezförmigen Grund- und Deckfläche zu berechnen und alsdann wie in Nr. 2 zu verfahren.

Beispiel. Ein 9 m. hoher Obelisk hat trapezförmige Endflächen, von denen die Grundfläche 4 m. breit ist und Parallelen von 12 m. und 6 m. hat, während die Deckfläche 2 m. breit ist und Parallelen von 9 m. und 5 m. hat. Wie viel Kubikmeter enthält dieser Obelisk?

In der Grundfläche ist die mittlere Länge $= \frac{12 + 6}{2} =$ 9 m. bei 4 m. Breite.

In der Deckfläche ist die mittlere Länge $= \frac{9 + 5}{2} =$ 7 m. bei 2 m. Breite.

Demgemäß findet sich nach Nr. 2:

Mittlere Durchschnittsfigur:

Länge $= \frac{9 + 7}{2} = 8$ m.; Breite $= \frac{4 + 2}{2} = 3$ m.; Inhalt $= 8 \times 3 = 24$ □m.

Ergänzungsfigur:

Länge $= \frac{9-7}{2} = 1$ m.; Breite $= \frac{4-2}{2} = 1$ m.; Inhalt $= 1 \times 1 = 1$ □m.

Es enthält also der Obelisk

$9 \times (24 + 1/3) = 216 + 3 = 219$ ⧉m.

Uebungsaufgaben. Ein 15 m. hoher Obelisk, der von sechs Trapezen begrenzt wird, hat

Gegeben:

	Grundfläche:			Deckfläche.		
	Breite.	Parallelen.		Breite.	Parallelen.	
393.	9 m.	17 m.	13 m.	7 m.	14 m.	12 m.
394.	8 „	18 „	16 „	6 „	11 „	9 „
395.	5 „	9 „	7 „	3 „	8 „	6 „
396.	7 „	12 „	8 „	5 „	10 „	6 „
397.	6 „	14 „	10 „	2 „	12 „	8 „
398.	10 „	13 „	9 „	6 „	11 „	7 „

Gesucht:

Kubikinhalt.

1845 ⧉m.
1435 „
452½ „
815 „
670 „
1210 „

6. Der Mantel (die Summe der Seitenflächen) einer abgekürzten regulären Pyramide wird gefunden, wenn man die halbe Summe des Umfanges der Grund- und Deckfläche mit der Seitenhöhe (d. i. Höhe eines Seiten-Trapezes) multiplicirt. Diese Höhe läßt sich aus der Höhe des Ergänzungsdreiecks (d. i. des Seitendreiecks der Ergänzungs-Pyramade) berechnen. Man hat nämlich letztere mit dem Unterschiede der homologen Grund- und Deckkante zu multipliciren und das Produkt durch die Maßzahl der Deckkante zu dividiren.

Wird allgemein die Grundkante mit a, die Deckkante mit b und die Höhe der abgekürzten regulären Pyramide mit h, so wie der Inhalt des Mantels mit M bezeichnet, so ist

in der abgekürzten

dreis. Pyramide $M = \frac{3}{4}(a+b) \cdot \sqrt{4h^2 + \frac{1}{3}(a-b)^2}$

viers. Pyramide $M = (a+b) \cdot \sqrt{4h^2 + (a-b)^2}$

sechss. Pyramide $M = \frac{3}{2}(a+b) \cdot \sqrt{4h^2 + 3(a+b)^2}$

Beispiel. Eine abgekürzte regelmäßige vierseitige Pyramide von 6 m. Höhe hat in der Grundfläche 5 m., in der Deckfläche 3 m. Kantenlänge. Es soll ihr Mantel und ihre ganze Oberfläche gefunden werden.

Nach der betreffenden Formel, in welche a = 5, b = 3 und h = 6 einzusetzen ist, ergiebt sich

$$M = (5+3) \cdot \sqrt{4 \cdot 6^2 + (5-3)^2}$$
$$= 8 \cdot \sqrt{144 + 4} = 8\sqrt{148} = 97{,}3242 \;\square\text{m. (nahe).}$$

Wird hierzu die Grundfläche $= 5 \times 5 = 25$ □m. und die Deckfläche $= 3 \times 3 = 9$ □m. addirt, so findet sich die ganze Oberfläche des Körpers $= 25 + 9 + 97{,}3242 = 131{,}3242$ □m. (annähernd).

Ohne Formel verfährt man folgendermaßen. Der kleinste Radius (d. i. der Radius des einbeschriebenen Kreises) beträgt in der Grundfläche $\frac{5}{2}$ m., in der Deckfläche $\frac{3}{2}$ m. Die Höhe der Ergänzungspyramide sei = x, so findet sich nach Nr. 4 a.

$5 - 3 : 3 = 6 : x$
d. i. $2 : 3 = 6 : x$
oder $1 : 3 = 3 : x$,
woraus folgt $x = 3 \times 3 = 9$ m.

Demgemäß ist die Ergänzungspyramide 9 m., die ergänzte Pyramide $6 + 9 = 15$ m. hoch und daher

die Seitenhöhe der Ergänzungspyramide $= \sqrt{9^2 + (\frac{3}{2})^3} =$
$\sqrt{81 + 2\frac{1}{4}} = \sqrt{83\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{333} = \frac{3}{2}\sqrt{37}$ m.,

die Seitenhöhe der ergänzten Pyramide $= \sqrt{15^2 + (\frac{5}{2})^2} =$
$\sqrt{225 + 6\frac{1}{4}} = \sqrt{231\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{925} = \frac{5}{2}\sqrt{37}$ m.,

also die Seitenhöhe der abgekürzten Pyramide =
$\frac{5}{2}\sqrt{37} - \frac{3}{2}\sqrt{37} = (\frac{5}{2} - \frac{3}{2}) \cdot \sqrt{37} = \sqrt{37}$ m.

Ferner ist der untere Umfang des gegebenen Körpers $= 4 \times 5 = 20$ m., der obere Umfang $= 4 \times 3 = 12$ m.,

mithin die halbe Summe der beiden Umfangslinien $= \frac{20 + 12}{2}$ $= 16$ m. und daher der Mantel der abgekürzten Pyramide $= 16 \sqrt{37} = 97{,}3242$ □m. annähernd, welches Resultat bereits gefunden worden ist.

Uebungsaufgaben. In einer 18 m. hohen abgekürzten regulären Pyramide ist

Gegeben:			Gesucht:
Grundfläche.	Grundkante.	Deckkante.	Mantel.
399. Dreieck.	11 m.	5 m.	$24 . \sqrt{327}$ □m.
400. Dreieck.	10 „	4 „	$21 . \sqrt{327}$ „
401. Quadrat.	12 „	8 „	$80 . \sqrt{82}$ „
402. Quadrat.	10 „	6 „	$64 . \sqrt{82}$ „
403. Sechseck.	8 „	6 „	$42 . \sqrt{327}$ „
404. Sechseck.	9 „	5 „	$168 . \sqrt{21}$ „

§ 27.

Der abgekürzte Kegel.

1. Der abgekürzte oder abgestumpfte Kegel ist der untere Theil eines vollständigen Kegels, welcher parallel mit der Grundfläche durchschnitten worden ist. Der abgeschnittene Kegel heißt Ergänzungskegel, weil er den abgekürzten Körper zu einem vollständigen Kegel ergänzt. Die Form abgekürzter Kegel haben z. B. Blumentöpfe, regelmäßig gewachsene Baumstämme, Gefäße u. s. w. Die Oberfläche des abgekürzten Kegels besteht aus zwei parallelen Kreisflächen von verschiedener Größe — den beiden Grundflächen — und einer krummen Seitenfläche, dem Mantel. Jede gerade Linie von einem Punkte des oberen Umkreises nach einem Punkte des unteren Umkreises heißt Seite des abgekürzten Kegels, während der senkrechte Abstand beider Grundflächen von einander die Höhe genannt wird.

2. Der abgekürzte Kegel — als runder Obelisk — ist gleich der Summe aus einem Cylinder und einem Kegel,

lielche die Höhe des abgekürzten Kegels zur Höhe und bezüglich die halbe Summe und die halbe Differenz der Radien der beiden Grundflächen des abgekürzten Kegels zu Radien ihrer Grundflächen haben. Hiernach ist der Kubikinhalt des abgekürzten Kegels =

$$V = h\,\pi.\left(\left[\frac{r+\rho}{2}\right]^2 + \tfrac{1}{3}\left[\frac{r-\rho}{2}\right]^2\right),$$

wo h die Höhe abgekürzten Körpers, r den Radius der Grundfläche, ρ den Radius der Deckfläche bezeichnet.

Man kann aber auch den abgekürzten Kegel als die Summe dreier ebenso hoher Kegel betrachten, von denen der eine die Grundfläche des abgekürzten Kegels, der andere die Deckfläche desselben, der dritte die mittlere Proportionalgröße dieser beiden Flächen zur Grundfläche hat. Demnach ist

$$V = \tfrac{1}{3}\,h\,\pi\,(r^2 + \rho^2 + r\,\rho).$$

Beispiel. In einem abgekürzten Kegel von 7 m. Höhe ist der Radius der Grundfläche = 3 m., der Radius der Deckfläche = 2 m. Wie viel beträgt der Kubikinhalt?

Hier ist h = 7 m., r = 3 m., ρ = 2 m.

Nach dem ersten Verfahren ergiebt sich der Kubikinhalt =

$$7\,.\,{}^{22}/_{7}.\left(\left[\frac{3+2}{2}\right]^2 + \tfrac{1}{3}\left[\frac{3-2}{2}\right]^2\right) = 7\,.\,{}^{22}/_{7}\,.\,({}^{25}/_{4} + \frac{1}{3\,.\,4}\Big) = 7\,.\,{}^{22}/_{7}\,.\,{}^{76}/_{12} = \frac{22\,.\,76}{12} = \frac{22\,.\,19}{3} = {}^{418}/_{3}$$

$= 139\tfrac{1}{3}$ ☐m.

Nach dem zweiten Verfahren ist der Kubikinhalt =

$${}^{7}/_{3}\,.\,{}^{22}/_{7}\,.\,(3^2 + 2^2 + 3\,.\,2) = {}^{22}/_{3}\,.\,(9 + 4 + 6) = \frac{22\,.\,19}{3} = 139\tfrac{1}{3}$$ ☐m., welches Resultat mit dem vorigen übereinstimmt.

Ohne Formel verfährt man in ähnlicher Weise wie in § 26 Nr. 4 a, nämlich folgendermaßen.

Der Unterschied der beiden Radien (r und ρ) verhält sich zur Höhe (h) des abgekürzten Kegels, wie der Radius (ρ) der Deckfläche zur Höhe (x) des Ergänzungskegels; also im gegenwärtigen Falle

$$3 - 2 : 7 = 2 : x$$

d. i. $1 : 7 = 2 : x$

woraus folgt $x = 7 \times 2 = 14$ m.

Hiernach hat der Ergänzungskegel, dessen Grundfläche ein Kreis von 2 m. Radius ist, eine Höhe von 14 m., mithin $^{14}/_{3} \times 2 \times 2 \times {}^{22}/_{7} = {}^{2}/_{3} \times 2 \times 2 \times 22 = {}^{176}/_{3} = 58^{2}/_{3}$ ☐m. körperlichen Inhalt.

Der ergänzte Kegel, welcher $7 + 14 = 21$ m. hoch ist und einen Kreis von 3 m. Radius zur Grundfläche hat, enthält $^{21}/_{3} \times 3 \times 3 \times {}^{22}/_{7} = 3 \times 3 \times 22 = 198$ ☐m.

Demgemäß ist der Kubikinhalt des abgekürzten Kegels $= 198 - 58^{2}/_{3} = 159^{1}/_{3}$ ☐m., wie vorhin.

Anmerk. Bei obiger Bezeichnung ist

die Höhe des Ergänzungskegels $= \frac{h \cdot \rho}{r - \rho}$,

die Höhe des ergänzten Kegels $= \frac{h \cdot r}{r - \rho}$.

Uebungsaufgaben. In einem abgekürzten Kegel von 14 m. ist

Gegeben:		Gesucht:
Großer Radius.	Kleiner Radius.	Kubikinhalt.
405. 8 m.	6 m.	$2170^{2}/_{3}$ ☐m.
406. 8 „	5 „	1892 „
407. 8 „	4 „	$1642^{2}/_{3}$ „
408. 10 „	7 „	3212 „
409. 6 „	3 „	$1114^{2}/_{3}$ „
410. 6 „	2 „	$762^{2}/_{3}$ „

3. Der annähernden Berechnung des Kubikinhalts eines abgekürzten Kegels liegen (vgl. § 26 Nr. 3) nachstehende Sätze zu Grunde.

a. Der abgekürzte Kegel ist annähernd gleich einem ebenso hohen Cylinder, der die halbe Summe der beiden Radien des ersteren zum Radius seiner Grundfläche hat.

b. Der abgekürzte Kegel ist annähernd gleich einem ebenso hohen Cylinder, der die halbe Summe der Grund- und Deckfläche des ersteren zur Grundfläche hat.

Der bei diesen Verfahrungsweisen entstehende Fehler ist im ersten Falle nur halb so groß als im zweiten Falle. Jedoch ist das bei der ersten Berechnung gefundene Resultat kleiner, das Ergebniß des zweiten Verfahrens größer als die wahre Maßzahl des Kubikinhalts.

Beispiel nach Aufg. 405.

Nach dem ersten Näherungsverfahren ist

die halbe Summe der beiden Radien $= \frac{8 + 6}{2} = 7$ m.

die Grundfläche des inhaltsgleichen Cylinders $= 7 \times 7 \times {}^{22}/_{7}$ $= 154$ □m.,

der Kubikinhalt $= 14 \times 154 = 2156$ ⊞m., mithin $2170\,{}^{2}/_{3} - 2156 = 14{}^{2}/_{3}$ ⊞m. kleiner als der wahre Inhalt.

Nach der zweiten Näherungsberechnung findet sich: die halbe Summe der Grund- und Deckfläche $= {}^{1}/_{2} \,.\, (8^2 + 6^2) \,.\, {}^{22}/_{7} = {}^{1}/_{2} \,.\, (64 + 36) \,.\, {}^{22}/_{7} = \frac{100 \,.\, 22}{2 \,.\, 7} = {}^{1100}/_{7}$ □m., mithin der Kubikinhalt des 14 m. hohen inhaltsgleichen Cylinders $= \frac{1100 \times 14}{7} = 1100 \times 2 = 2200$ □m., d. i. $2200 - 2170{}^{2}/_{3} = 29{}^{1}/_{3}$ ⊞m. zu groß.

Die Abweichung von dem wahren Kubikinhalt beträgt aber gegenwärtig doppelt so viel als im ersten Falle.

Uebungsaufgaben. Annähernde Berechnung der in Aufg. 406 bis 410 bezeichneten abgekürzten Kegel. Es ergiebt sich

in Aufg.	ein Kubikinhalt von		
406.	1859 ⊞m.	oder	1958 ⊞m.
407.	1584 „	„	1760 „
408.	3179 „	„	3278 „
409.	1100 „	„	1144 „
410.	704 „	„	880 „

Anmerkung. Je mehr der Radius der Deckfläche von dem der Grundfläche abweicht, desto ungenauer wird das Resultat des Näherungs-Verfahrens.

4. Der Mantel eines abgekürzten senkrechten Kegels wird gefunden, wenn man den mittleren Umfang (die halbe Summe des oberen und unteren Umkreises) des Körpers mit der Seitenlinie (s) multiplicirt. Hiernach ist

$$M = s \cdot (r + \rho) \cdot \pi.$$

Aus der Höhe (h) des abgekürzten Kegels und den Radien (r und ρ) der Grund- und Deckfläche desselben läßt sich die Seitenlinie (s) berechnen. Letztere ist nämlich die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, welches die Höhe h des abgekürzten Kegels und den Unterschied der beiden Radien (d. i. $r - \rho$) zu Katheten hat.

Demgemäß enthält man

$$s = \sqrt{(r - \rho)^2 + h^2},$$

also schließlich

$$M = (r + \rho)\,\pi \cdot \sqrt{(r - \rho)^2 + h^2}$$

Um die Gesammt-Oberfläche des abgekürzten Kegels zu erhalten, addire man die Grund- und Deckfläche zu dem Inhalt des Mantels.

Erstes Beispiel. In einem abgekürzten senkrechten Kegel mit 25 m. langer Seitenlinie beträgt der Radius der Grundfläche 14 m., derjenige der Deckfläche 7 m. Wie groß ist a. der Mantel, b. die ganze Oberfläche dieses Körpers?

a. Summe der beiden Radien = 14 + 7 = 21 m.
Der halbe mittlere Umfang = 21 × 22/7 = 66 m.
Inhalt des Mantels = 25 × 66 = 1650 □m.

b. Hierzu die Grundfläche = 14 × 14 × 22/7 = 616 □m
und die Deckfläche = 7 × 7 × 22/7 = 154 „
Die ganze Oberfläche beträgt 2420 „

Zweites Beispiel. In einem abgekürzten Kegel von 24 m. Höhe beträgt der Radius der Grundfläche 14 m., derjenige der Deckfläche 7 m. Es soll der Mantel dieses Körpers berechnet werden.

Unterschied der beiden Radien = 14 — 7 = 7 m.
Quadrat dieses Unterschiedes = 7 × 7 = 49 □m.
Quadrat der Körperhöhe = 24 × 24 = 576 „

Quadrat der Seitenlinie = 625 □m.
Seitenlinie = $\sqrt{625}$ = 25 m.

Daher wie oben
der Mantel = 25 × 66 = 1650 □m.
die Grundfläche = 616 „
die Deckfläche = 154 „

die ganze Oberfläche = 2420 „

Uebungsaufgaben. In einem abgekürzten Kegel ist

	Gegeben:		Gesucht:	
	die Radien.	die Höhe.	die Seite.	der Mantel.
411.	10 m. und 3 m.	24 m.	25 m.	$1021\frac{3}{7}$ □m.
412.	14 „ „ $5\frac{1}{4}$ „	21 „	$22\frac{3}{4}$ „	$2127\frac{1}{8}$ „
413.	10 „ „ 2 „	15 „	17 „	$641\frac{1}{7}$ „
414.	32 „ „ 4 „	21 „	35 „	3960 „
415.	12 „ „ 5 „	$16\frac{4}{5}$ „	$18\frac{1}{5}$ „	$972\frac{2}{5}$ „

§ 17.

Die keilförmigen Obelisken oder die prismatischen Abschnitte.

1. Wenn ein rechtwinklig-vierseitiger Obelisk (im engern Sinne) über die kleinere seiner Grundflächen hinaus verlängert wird, so geht dieselbe zuletzt in eine Kante über. Der hierdurch entstehende Körper hat die Form eines Keils und kann daher ein keilförmiger Obelisk genannt werden. Die obere Kante desselben läuft mit zwei Kanten der Grundfläche parallel, so daß sich dieser Körper zugleich als einen Theil eines liegenden Prisma darstellt, welches an beiden Seiten schief abgeschnitten worden ist. Mit Bezug hierauf führt der keilförmige Obelisk den Namen eines dreiseitigen prismatischen Abschnittes. Die Oberfläche eines solchen Körpers besteht aus einem Rechteck oder Trapez, als Grundfläche, und zwei Dreiecken mit zwei Trapezen, als Seitenflächen. Der

senkrechte Abstand der oberen Kante von der Grundfläche heißt Höhe. Die Form prismatischer Abschnitte haben z. B. der Keil und die denselben im Großen darstellenden Walmdächer frei stehender Häuser. (Die Walmdächer haben auch von der Giebelwand nach der Firste hin schräge Flächen.) Die gewöhnlichen Hausdächer, deren Firste mit der Grundfläche hinsichtlich der Länge genau übereinstimmt, sowie ein Keil, dessen Schärfe mit der gegenüberliegenden Grundfläche gleiche Länge hat, sind offenbar selbst dreiseitige Prismen, welchen die begrenzenden Dreiecke zur Grundfläche dienen, während die obere Kantenlinie (die Firste) als Höhe des Körpers zu betrachten ist. Hieraus folgt, daß der Kubikinhalt derartiger Körper gefunden wird, wenn man, wie z. B. bei einem gewöhnlichen Hausdache, die Länge und Breite der rechtwinkligen Grundfläche mit einander multiplicirt, das Produkt mit der Höhe (d i. dem senkrechten Abstande der oberen Kante von der Grundfläche) wieder vervielfältigt und die erhaltene Zahl zuletzt durch 2 dividirt.

Erstes Beispiel. Wie groß ist der innere Raum eines gewöhnlichen Hausdaches von 9 m. Höhe, wenn die Grundfläche 12 m. lang und 10 m. breit ist? (Sämmtliche Ausdehnungen im Lichten.)

Erstes Verfahren. Grundfläche $= 12 \times 10 = 120$ □m.

Innerer Dachraum $= \frac{120 \times 9}{2} = 60 \times 9 =$ 540 ⧉m.

Zweites Verfahren. Seitendreieck als Grundfläche $=$ $\frac{10 \times 9}{2} = 45$ □m.

Jede der drei parallelen Kanten als Höhe $= 12$ m.

Innerer Dachraum $= 45 \times 12 = 540$ ⧉m.

Zweites Beispiel. Wie groß ist ein 10 cm. hoher Keil mit 3 cm. langer Schärfe, wenn seine stumpfe Seite ein Rechteck von 3 cm. Länge und 2 cm. Breite bildet?

Erstes Verfahren. Höhe = 10 cm. Grundfläche = 3 × 2 = 6 □cm.

Kubikinhalt = $\frac{10 \times 6}{2}$ 30 = ⧉cm.

Zweites Verfahren. Seitendreieck = $\frac{2 \times 10}{2}$ = 10 □cm.

Jede der drei parallelen Kanten = 3 cm.

Kubikinhalt = 10 × 3 = 30 ⧉cm.

2. Zur Berechnung eines dreiseitigen prismatischen Abschnitts oder eines keilförmigen Obelisken kann man sich der Obeliskenformel (§ 26 Nr. 2) bedienen. Jedoch hat man alsdann zu beachten, daß die Breite der Deckfläche (scharfe Kante) gleich Null ist. Auch ergiebt sich der Kubikinhalt eines solchen Körpers, wenn man den senkrechten Querdurchschnitt, der die Breite der Grundfläche des Keils zur Grundlinie und einen Punkt der scharfen Kante zur Spitze hat, mit dem dritten Theil der Summe der drei parallelen Kanten multiplicirt. Wird also der erwähnte senkrechte Querdurchschnitt, welcher stets ein Dreieck ist, mit △, die Länge und Breite der Grundfläche mit a und b, die der Grundfläche gegenüberliegende scharfe Kante mit c bezeichnet, so ist der Kubikinhalt des keilförmigen Obelisken =

$$\triangle \cdot \left(\frac{a + a + c}{3}\right)$$

Erstes Beispiel. Wie groß ist der von einem 15 m. hohen Walmdach eingeschlossene Raum, wenn die Grundfläche 18 m. lang und 10 m. breit, die Firste (die obere Dachkante) hingegen 12 m. lang ist? (Sämmtliche Ausdehnungen im Lichten gemessen.)

Erstes Verfahren. Für die mittlere Durchschnittsfigur ist die Länge = $\frac{18 + 12}{2}$ = 15 m., die Breite = $\frac{18 + 0}{2}$ = 5 m.; mithin ihr Flächeninhalt = 15 × 5 = 75 □m.

Die Ergänzungsfigur hat $\frac{18 - 12}{2} = 3$ m. Länge und $\frac{10 - 0}{2} = 5$ m. Breite, also $3 \times 5 = 15$ □m. Flächeninhalt.

Demgemäß ist der innere Rauminhalt des Walmdaches $= 15 \times (75 + {}^{15}/_{3}) = 15 \times (75 + 5) = 15 \times 80 = 1200$ ⧉m.

Zweites Verfahren. Der senkrechte Querdurchschnitt enthält als Dreieck von 10 m. Grundlinie und 15 m. Höhe $\frac{10 \times 15}{2} = 75$ □m.

Die Summe der drei parallelen Kanten ist $= 18 + 18 + 12 = 48$ m.

Mithin beträgt der gesuchte Kubikinhalt $75 \times {}^{48}/_{3} = 75 \times 16 = 1200$ ⧉m.

Zweites Beispiel. Die stumpfe Seite eines 30 cm. hohen Keils hat 7 cm. Länge und 3 cm. Breite, während die mit der Längenseite der Grundfläche parallellaufende scharfe Kante 4 cm. beträgt. Es soll der Kubikinhalt dieses Keils berechnet werden.

Erstes Verfahren. Die mittlere Durchschnittsfigur hat $\frac{7 + 4}{2} = {}^{11}/_{2}$ cm. Länge und $\frac{3 + 0}{2} = {}^{3}/_{2}$ cm. Breite, also $\frac{11 \times 3}{2 \times 2} = {}^{33}/_{4}$ □cm. Inhalt.

Die Ergänzungsfigur ist $\frac{7 - 4}{2} = {}^{3}/_{2}$ cm. lang und $\frac{3 - 0}{2} = {}^{3}/_{2}$ cm. breit, und enthält daher $\frac{3 \times 3}{2 \times 2} = {}^{9}/_{4}$ □cm.

Hiernach beträgt der Kubikinhalt des Keils $30 \times \left({}^{33}/_{4} + \frac{1 \times 9}{3 \times 4}\right) = 30 \times ({}^{33}/_{4} + {}^{3}/_{4}) = 30 \times 9 = 270$ ⧉m.

Zweites Verfahren. Der senkrechte Querdurchschnitt ist ein Dreieck von 3 cm. Grundlinie und 30 cm. Höhe und enthält daher $\frac{3 \times 30}{2} = 45$ □cm.

Die Summe der drei parallelen Kanten ist $= 7 + 7 + 4 = 18$ cm. Folglich beträgt der gesuchte Kubikinhalt $45 \times {}^{18}/_{3} = 45 \times 6 = 270$ ⧉cm.

Uebungsaufgaben. In einem keilförmigen Obelisken ist

	Gegeben:				Gesucht:
	Untere Länge.	Breite.	Obere Kantenlin.	Körperhöhe.	Kubikinhalt.
416.	12 m.	9 m.	12 m.	8 m.	432 ⧉m.
417.	10 „	8 „	10 „	7 „	280 „
418.	16 cm.	9 cm.	16 cm.	10 cm.	720 ⧉cm.
419.	14 „	8 „	14 „	12 „	672 „
420.	15 m.	9 m.	12 m.	8 „	504 ⧉m.
421.	14 „	8 „	8 „	7 „	336 „
422.	13 „	6 „	7 „	5 „	165 „
423.	12 cm.	8 „	9 „	10 „	480 „
424.	11 „	6 „	8 „	7 „	210 „
425.	10 „	5 „	7 „	8 „	180 „

Anmerk. Um den Kubikinhalt irgend eines parallelepipedischen Abschnitts zu berechnen, multiplicire man den senkrechten Querdurchschnitt mit der halben Summe zweier gegenüberstehender Kanten. Hiernach ist in § 22 Nr. 4 im zweiten Beispiel der senkrechte Querdurchschnitt als Parallelogramm $= 2 \times 2 = 4$ □m., die halbe Summe zweier gegenüberstehenden Kanten $= \frac{9 + 12}{2}$ oder $\frac{10 + 11}{2}$ und daher der Kubikinhalt des Körpers $= 4 \times {}^{21}/_{2} = 2 \times 21 = 42$ ⧉m.

Aus dem hier und oben gezeigten Verfahren ergiebt sich, daß es auf die Berechnung keinen Einfluß ausübt, ob ein Parallelepipedon, resp. ein Prisma überhaupt, an nur einer oder an beiden Endflächen (Grund und Deckfläche) schief abgeschnitten worden ist.

§ 29.

Bauhölzer und Baumstämme.

1. Kantige Bauhölzer, welche an dem einen Ende stärker sind als an dem andern, betrachtet man als Prismen von mittlerer Dicke und mittlerer Breite in den Grundflächen, während die Länge des Balkens als die Höhe des Prisma angesehen wird.

Erstes Beispiel. Ein vierkantiger Balken von 6 m. Länge ist am starken Ende 40 cm. breit und 36 cm. dick, am schwächeren Ende 30 cm. breit und 24 cm. dick. Wie viel Kubikmeter Holz enthält dieser Balken?

Mittlere Breite $= \frac{40 + 30}{2} = 35$ cm.

Mittlere Dicke $= \frac{36 + 24}{2} = 30$ cm.

Länge 6 m. = 600 cm.
Mittlere Durchschnittsfläche = 35 × 30 = 1050 □cm.
Kubikinhalt des Balkens = 600 × 1050 = 630000 ⧉cm. = 630 ⧉dm. = 0,630 ⧉m.

Anmerk.: Sämmtliche Ausdehnungen des Balkens müssen vor der Berechnung auf einerlei Benennung gebracht werden. Obige Berechnung ist mit Centimetern geführt. Man kann aber auch von vornherein alle Ausdehnungen des Balkens in Metern ausdrücken, was bei der Berechnung zur Anwendung der Decimalbrüche führt. Wenigstens ist die Decimalbruchrechnung alsdann sehr zu empfehlen.

Uebungsaufgaben. In einem vierkantigen Balken ist

	Gegeben:					Gesucht:
	Stammende.		Zopfende.			
	Breite.	Dicke.	Breite.	Dicke.	Länge.	Kubikinhalt.
426.	48 cm.	30 cm.	32 cm.	20 cm.	8 m.	$^4/_5$ ⧉m.
427.	45 „	40 „	35 „	30 „	5 „	$^7/_{10}$ „
428.	57 „	48 „	53 „	42 „	8 „	1,98 „
429.	64 „	52 „	56 „	48 „	6 „	$1^4/_5$ „
430.	57 „	46 „	43 „	34 „	5 „	1 „

2. Baumstämme, die oben und unten so abgesägt sind, daß ihre Endflächen mit einander parallel laufen, stellen sich

als abgekürzte Kegel dar und könnten daher als solche am bequemsten nach der Obeliskenformel berechnet werden. Da jedoch selten ihr Wuchs vollkommen regelmäßig ist und überdies eine annähernd genaue Inhaltsangabe im praktischen Leben genügt, so pflegt man Baumstämme als Walzen zu betrachten, welche bei derselben Länge Endflächen von mittlerem Durchmesser (resp. Umfang) haben.

Vor der Berechnung müssen aber sämmtliche Ausdehnungen des Baumstammes auf einerlei Benennung, z. B. Centimeter, resp. Meter gebracht werden.

Soll bei der Berechnung des Kubikinhalts statt des mittleren Durchmessers der mittlere Umfang des Baumstammes zur Anwendung kommen, so multiplicire man das Quadrat der halben Summe des oberen und unteren Umkreises mit $^{7}/_{88}$ der Länge.

Beispiel. 1. Ein 8 m. langer Baumstamm hat am Stammende 56 cm., am Zopf- oder Wipfelende 42 cm. im Durchmesser. Wie viel beträgt der Kubikinhalt dieses Baumstammes?

Der mittlere Durchmesser ist $= \frac{56 + 42}{2} = 49$ cm., daher der mittlere Radius $= {}^{49}/_{2}$ cm. und die mittlere Durchschnittsfläche $= {}^{49}/_{2} \times {}^{49}/_{2} \times {}^{22}/_{7} = \frac{49 \times 7 \times 11}{2} =$ $^{3773}/_{2}$ □ cm., folglich der Kubikinhalt des 8 m. oder 800 cm. langen Baumstammes $= \frac{3773 \times 800}{2} = 1509200$ ⧈ cm. $=$ 1,5092 ⧈ m.

Beispiel. 2. Ein 8 m. langer Baumstamm hat am Stammende 176 cm. oder 1,76 m., am Zopfende 132 cm. oder 1,32 m. Umfang Wie viel beträgt der Kubikinhalt dieses Baumstammes?

Berechnet man aus den beiden Umfangslinien die entsprechenden Durchmesser, so findet sich

der Durchmesser des Stammendes $= \frac{176 \times 7}{22} = 8 \times 7 =$ 56 cm.

der Durchmesser des Zopfendes $= \frac{132 \times 7}{22} = 6 \times 7 =$ 42 cm.
und kann nur in der im vorigen Beispiel angegebenen Weise fortgefahren werden.

Um jedoch auch ohne Berechnung der betreffenden Durchmesser zum Ziele zu kommen, hat man zunächst den mittleren Umfang des Baumstammes zu bestimmen. Dieser Umfang ist $= \frac{176 + 132}{2} = 154$ cm., also sein Quadrat $= 154 \times 154 = 23716$ □cm. Wird nun das Quadrat des mittleren Umfangs mit $^7/_{88}$ der Länge, d. i. mit $^7/_{88} \times 800 = {}^{700}/_{11}$ cm. multiplicirt, so ergiebt sich der gesuchte Kubikinhalt $\frac{23716 \times 700}{11} = 2156 \times 700 = 1509200$ ⧉cm. $=$ 1,5092 ⧉m.

Uebungsaufgaben. Ein Baumstamm hat

	Gegeben:		Gesucht:
Stamm-Durchmesser.	Zopf-Durchmesser.	Länge.	Kubikinhalt.
431. 42 cm.	35 m.	8 m.	0,9317 ⧉m.
432. 56 "	42 "	9 "	1,69785 "
433. 50 "	40 "	7 "	1,11375 "
434. 49 "	42 "	6 "	0,975975 "
435. 52 "	48 "	$3^1/_2$ "	0,6875 "

Stamm-Umfang.	Zopf-Umfang.	Länge.	Kubikinhalt.
436. 1,32 m.	1,10 m.	9 m.	1,0481625 ⧉m.
437. 1,54 "	1,32 "	8 "	1,3013 "
438. 1,76 "	1,54 "	8 "	1,7325 "
439. 1,38 "	1,04 "	6 "	0,698775 "
440. 1,25 "	0,95 "	5 "	0,48125 "

Anmerk. Um den Kubikinhalt eines noch nicht gefällten Baumes bestimmen zu können, muß man vor Allem die Höhe desselben ermitteln. Dies geschieht am bequemsten mit Hülfe des Schattens. Man steckt nämlich einen Stab lothrecht in die Erde und mißt

alsdann sowohl die Höhe als die Schattenlänge des Stabes, sowie auch die Länge des Schattens, den der zu messende Baum in derselben Zeit wirft. Nun verhält sich die Schattenlänge des Stabes zur Höhe desselben wie die Länge des Baumschattens zur Höhe des Baumes. Demnach wird die Höhe des Baumes gefunden, wenn man seine Schattenlänge mit der Höhe des lothrecht eingesteckten Stabes multiplicirt und die erhaltene Zahl durch die Schattenlänge des letzteren dividirt. Wenn z. B. in derselben Zeit ein 5' hoher Stab einen 8' langen, und ein Baum einen 120' langen Schatten wirft, so beträgt die Höhe dieses Baumes $\frac{120 \times 5}{8}$ oder $15 \times 5 = 75'$. Aus der Höhe und dem Durchmesser der Grundfläche kann aber (nach § 25 Nr. 2) der Kubikinhalt des kegelähnlichen Baumes sofort annähernd gefunden werden.

§ 30.

Runde Gefäße.

1. Runde Gefäße, die oben und unten gleiche Weite haben, d. h. deren Boden- und Oeffnungs-Durchmesser übereinstimmen, sind Cylinder und werden daher wie diese (nach § 23) berechnet, gleichviel ob die Grundfläche ein Kreis, eine Ellipse oder ein Oval ist.

Bei der Anfertigung cylinderförmiger Gefäße mit kreisrunder Bodenfläche ist es sehr vortheilhaft, die in § 23 Nr. 5 bis 8 mitgetheilten Wahrheiten zu beachten.

2. Kreisrunde Gefäße, wie z. B. Eimer und Bottiche, bei denen die Bodenweite und der Oeffnungs-Durchmesser verschieden sind, haben die Form eines abgestumpften Kegels und werden demgemäß nach § 27 behandelt, wodurch sich ihr Rauminhalt genau findet, und zwar in Litern, wenn die Berechnung Kubikdecimeter ergiebt; denn das Kubikdecimeter heißt als Hohlmaß ein Liter. Wird die Berechnung in Metern geführt, so erhält man zuletzt Kubikmeter, deren Zahl, mit 10 multiplicirt, den Rauminhalt des Gefäßes in Hektolitern bezeichnet, indem je 10 Hl. ein Kubikmeter bilden. Die Rechnung in Centimetern führt zu Kubikcentimetern und, da 1 ⧆cm. = 1 Millimeter ist, gleichzeitig zu Millilitern.

Genügt jedoch eine annähernde Angabe des Rauminhalts, so kann man das Gefäß als einen gleich hohen Cylinder von mittlerem Durchmesser, resp. Radius betrachten.

Beispiel. Ein kreisrunder Bottich von $1^1/_4$ m. Tiefe hat Enddurchmesser von 1,40 m. und 1,26 m. Wie viel Hektoliter kann er fassen?

Genaue Berechnung. Die mittlere Durchschnittsfläche, deren Radius $\frac{0,70 + 0,63}{2} = \frac{1,33}{2} = 0,665$ m. beträgt, enthält $0,665 \times 0,665 \times {}^{22}/_{7} = 0,665 \times 0,095 \times 22 = 1,38985$ □m.

Die Ergänzungsfigur, deren Radius $\frac{0,70 - 0,63}{2} = {}^{7}/_{200} = 0,035$ m. beträgt, enthält $0,035 \times 0,035 \times {}^{22}/_{7} = 0,035 \times 0,005 \times 22 = 0,00385$ □m.

Daher ist der Kubikinhalt des Bottichs $= 1^1/_4 \, . \left(1,38985 + \frac{0,00385}{3}\right) = {}^{5}/_{12} \, . \, (4,16955 + 0,00385) = {}^{5}/_{12} \, . \, 4,17340 = {}^{5}/_{3} \, . \, 1,04335 = \frac{5,21675}{3}$ ⧉m. $= \frac{5,21675}{3} \times 10 = \frac{52,1675}{3} = 17,389166 \ldots$ Hektoliter.

Annähernde Berechnung. Nach der vorigen Berechnung ist der Inhalt der mittleren Durchschnittsfläche = 1,38985 □m. Der $^5/_4$ m. tiefe Bottich enthält daher $^5/_4 \times 1,38985 = \frac{6,94925}{4} = 1,7373125$ ⧉m. $= 1,7373125 \times 10 = 17,373125$ Hl., welches Resultat 0,01604166 . . . Hl. oder noch nicht 2 volle Liter weniger beträgt als das vorhin gefundene.

Will man bei gegenwärtigem Verfahren die Decimalbruchrechnung vermeiden, so drücke man alle Ausdehnungen des Bottichs in Centimetern aus und fahre dann folgendermaßen fort.

Mittlerer Durchmesser $= \frac{140 + 126}{2} = {}^{266}/_{2} = 133$ cm.

Mittlerer Radius $^{133}/_{2}$ cm.

Inhalt der mittleren Durchschnittsfläche $= \frac{133 \times 133 \times 22}{2 \times 2 \times 7}$ $= \frac{133 \times 19 \times 11}{2} = {}^{27797}/_{2}$ □cm.

Der Bottich ist $1^1/_4$ m. = 125 cm. tief und enthält daher $\frac{27797 \times 125}{2} = \frac{3474625}{2} = 1737312{,}5$ ⧉cm. = 1737,3125 dm. = 1737,3125 Liter = 17,373125 Hl.

Eine zweite annähernde Berechnung besteht darin, daß man das zu berechnende Gefäß als einen gleich hohen Cylinder betrachtet, welcher die halbe Summe der Bodenfläche und Oeffnung des ersteren zur Grundfläche hat. Hiernach ist im obigen Beispiel:

der Inhalt der Bodenfläche $= 70^2 \times {}^{22}/_{7}$ □cm.
die Größe der Oeffnung $= 63^2 \times {}^{22}/_{7}$ „

die halbe Summe der beiden Endflächen $= (70^2 + 63^2) \times {}^{11}/_{7}$ $= (4900 + 3969) \times {}^{11}/_{7} = 8869 \times {}^{11}/_{7} = 1267 \times 11$ = 13937 □cm.

Der $1^1/_4$ m. = 125 cm. tiefe Bottich enthält daher 125 × 13937 ⧉cm. = ${}^{13937}/_{8}$ oder $1742^1/_8$ ⧉dm. = $1742^1/_8$ Liter oder 17,42125 Hl.

Dieser Inhalt ist um mehr als 3 Liter größer als das Resultat der genauen Berechnung.

Uebungsaufgaben. Zweimalige annähernde Berechnung des Litergehalts der nachstehend bezeichneten kreisrunden Gefäße

	Gegeben:			Gesucht:
	Radius der Bodenfläche.	Radius der Oeffnung.	Tiefe.	Kubikinhalt.
441.	21 cm.	28 cm.	14 cm.	26,411 od. 26,95 l.
442.	14 „	21 „	12 „	11,55 „ 12,012 „
443.	28 „	35 „	20 „	62,37 „ 63,14 „
444.	1,12 m.	1,47 m.	2 m.	105,413 „ 107,338 Hl
445.	1,26 „	1,68 „	3 „	203,742 „ 207,9 „
446.	0,84 „	1,12 „	$1^1/_2$ „	45,276 „ 46,2 „

Anmerk. Die Berechnung aus der halben Summe der Bodenfläche und Oeffnung ergiebt stets ein zu großes Facit, während das mittels der

halben Summe der beiden Enddurchmesser gefundene Resultat alle Mal zu klein ist. Jedoch ist der Fehler im zweiten Falle nur halb so groß als im ersten Falle.

3. Ovale Gefäße, z. B. Bottiche Kühlschiffe, Wannen u. s. w., welche Ellipsen von verschiedenen Achsen zu Endflächen haben, lassen sich ebenfalls als abgekürzte Kegel berechnen, und zwar am bequemsten nach der Obeliskenformel (§ 26 Nr. 2 und § 27 Nr. 2). Dieses Verfahren führt stets zu einem genauen Resultat. Annähernde Genauigkeit wird durch folgende Verfahrungsweisen erzielt, bei denen ebenfalls zu beachten bleibt, daß die gefundene Zahl der Kubikdecimeter zugleich den Litergehalt bezeichnet, während — wenn in die Berechnung nur Meter eingetreten sind — die sich ergebende Zahl der Kubikmeter mit 10 multiplicirt den Rauminhalt in Hektolitern angiebt.

a. Ein ovales Gefäß ist annähernd gleich einem eben so hohen Cylinder, der die mittlere Durchschnittsfläche des ersteren zur Grundfläche hat.

Diese mittlere Durchschnittsfläche hat die halbe Summe der beiden Längenachsen zur Längenachse, und die halbe Summe der beiden Breitenachsen zur Breitenachse. Ihr Flächeninhalt ergiebt sich, wenn man das Produkt der beiden mittleren Achsen mit $\frac{\pi}{4} = {}^{11}/_{14}$ multiplicirt.

b. Ein ovales Gefäß ist annähernd gleich einem ebenso hohen Cylinder, der die halbe Summe der beiden Endflächen des ersteren zur Grundfläche hat.

Die hier erwähnte halbe Summe der Endflächen wird am bequemsten gefunden, wenn man das Produkt der beiden oberen Achsen zu dem Produkt der beiden unteren Achsen addirt und die Hälfte dieser Summe mit $\frac{\pi}{4} = {}^{11}/_{14}$ multiplicirt.

c. Ein ovales Gefäß ist annähernd gleich einem ebenso hohen Cylinder, der den vierten Theil der Summe der vier Achsen des ersteren zum Durchmesser seiner Grundfläche hat.

Beispiel. Ein ovales Gefäß von 70 cm. Tiefe hat in seiner Bodenfläche Achsen von 84 cm. und 50 cm., während

die Achsen seiner Oeffnungs-Fläche 98 cm. und 60 cm. betragen. Wie viel Liter kann dieses Gefäß aufnehmen?

Genaue Berechnung. Mittlere Längenachse $\frac{84 + 98}{2}$ $= 91$ cm. Mittlere Breitenachse $= \frac{50 + 60}{2} = 55$ cm.

Mittlere Durschnittsfläche $= 91 \times 55 \times {}^{11}/_{14} = \frac{13 \times 55 \times 11}{2}$ $= {}^{7865}/_{2}$ □cm.

Die Achsen der Ergänzungsfigur betragen $\frac{98 - 84}{2} =$ 7 cm. und $\frac{60 - 50}{2} = 5$ cm. Mithin enthält diese Figur $7 \times 5 \times {}^{11}/_{14} = {}^{55}/_{2}$ □cm.

Hiernach ist der Rauminhalt des Gefäßes $= 70 \times \left(\frac{7865}{2} + \frac{55}{3 \times 2}\right) = 35\,(7865 + {}^{55}/_{3}) = {}^{35}/_{3}(23595 + 55) =$ $\frac{35 \times 23650}{2} = \frac{827750}{3} = 275916{}^{2}/_{3}$ ⧆cm. $= 275{,}9166\,..$ ⧆dm $= 275{,}9166\,...$ Liter.

Annähernde Berechnung a. Nach der vorigen Berechnung enthält die mittlere Durchschnittsfläche ${}^{7865}/_{2}$ □cm. Daher ist der Rauminhalt des 70 cm. tiefen Gefäßes $\frac{7865 \times 70}{2} =$ $7865 \times 35 = 275275$ ⧆cm. $= 275{,}275$ ⧆dm. $= 275{,}275$ Liter. Dieser Inhalt beträgt 0,64166 . . . (d. i. noch nicht 1) Liter weniger als der oben gefundene.

Annähernde Berechnung b.

Produkt der beiden oberen Achsen $= 98 \times 60 = 5880$ □cm.
Produkt der beiden unteren Achsen $= 84 \times 50 = 4200$ „
zusammen 10080 □cm.
Halbe Summe der beiden Produkte $= 5040$ □cm.
Grundfläche des betreffenden Cylinders $= 5040 \times {}^{11}/_{14}$ $= 360 \times 11 = 3960$ □cm.

Kubikinhalt des 70 cm. tiefen Gefäßes = 3960 × 70 = 277200 ⧉cm. = 277,200 oder 277,2 ⧉dm., welche $277\frac{1}{5}$ Liter ergeben. Dieser Inhalt beträgt, 1,2833 . . . (d. i. über $1\frac{1}{4}$) Liter mehr als das Resultat der genauen Berechnung.

Annähernde Berechnung c.

Summe der vier Achsen = 84 + 50 + 98 + 60 = 292 cm.

Der vierte Theil dieser Summe beträgt $\frac{292}{4}$ = 73 cm.

Grundfläche des betreffenden Cylinders = 73 × 73 × $\frac{11}{14}$ □cm.

Rauminhalt des 70 cm. tiefen Gefäßes = 73 × 73 × $\frac{11}{14}$ × 70 = 73 × 73 × 11 × 5 = 293095 ⧉cm. = 293,095 ⧉dm. = 293,095 Liter, d. i. 17,17833 . . . Liter mehr als das Resultat der genauen Berechnung.

Anmerk. Unter den annähernden Berechnungen ist die mit a bezeichnete die zuverlässigste, während das Resultat des mit c bezeichneten Verfahrens oft am meisten von der Wahrheit abweicht.

Uebungsaufgaben. In einem ovalen Gefäß ist

Gegeben:

	Achsen der Bodenfläche.		Achsen der Oeffnung.		Tiefe.
447.	120 cm.	und 84 cm.	150 cm.	und 126 cm.	140 cm.
448.	91 „	63 „	112 „	84 „	70 „
449.	60 „	35 „	80 „	49 „	42 „
450.	48 „	28 „	64 „	35 „	49 „

Gesucht:
Kubikinhalt.

genau.	a.	b.	c.	
1570,73	1559,25	1593,9	1584,	Liter.
410,9875	410,31375	416,3775	421,09375	
97,79	97,02	99,33	103,488	
68,63266 . .	67,914	68,992	73,6914 . . .	

§ 31.

Fässer und Tonnen.

1. Die Fässer (Tonnen) haben entweder elliptisch oder parabolisch gekrümmte Dauben, was bei der genauen Berechnung des körperlichen Inhalts berücksichtigt werden muß.

Jedes Faß mit elliptisch gekrümmten Dauben ist gleich der Summe dreier Kegel, welche sämmtlich mit dem Fasse von gleicher Höhe sind, und von denen zwei den größten Querdurchschnitt (Kreisfläche der Spundtiefe) und einer die Bodenfläche des Fasses zur Grundfläche haben.

Bezeichnet daher h die Höhe (Länge) des Fasses, D die Spundtiefe (den größten Durchmesser) und d die Bodenweite (den kleinsten Durchmesser), so ist bei genauer Berechnung der Rauminhalt des Fasses =

$$\frac{h}{3} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (2\,D^2 + d^2);\ (I.)$$

und zwar in Litern, wenn die im Lichten gemessenen Ausdehnungen h, D und d in Decimetern ausgedrückt sind. Wären jedoch nur Centimeter in die Berechnung eingetreten, so müßte man, um Liter zu erhalten, die Zahl des Resultats schließlich durch 1000 dividiren.

Bei dem angegebenen Verfahren wird jedoch vorausgesetzt, daß in der Form des Fasses keine Unregelmäßigkeit vorkommt.

Beispiel. Ein Faß ist (im Lichten gemessen) 98 cm. lang und hat bei 42 cm. Bodenweite eine Spundtiefe von 56 cm. Wie viel Liter kann es aufnehmen?

Hier ist h = 98 cm., D = 56 cm. und d = 42 cm., mithin nach Formel I der Rauminhalt des Fasses $^{98}/_3 \cdot {}^{11}/_{14} \cdot (2 \cdot 56^2 + 42^2) = {}^{77}/_3 \cdot (2 \cdot 3136 + 1764) = {}^{77}/_3 \times (6272 + 1764) = {}^{77}/_3 \times 8036 = 206257\,^1/_3$ ◻cm. = 206,257 ... ◻dm. = 206,257 ... oder nahe $206\,^1/_4$ Liter.

Uebungsaufgaben. In einem Fasse ist

	Gegeben:		Gesucht:
Länge.	Spundtiefe.	Bodenweite.	Liter.
451. 90 cm.	56 cm.	49 cm.	135,515
452. 60 „	49 „	35 „	94,71
453. 80 „	63 „	49 „	216,6266 . . .
454. 70 „	56 „	42 „	147,3266 . . .
455. 84 „	63 „	42 „	213,444.

2. Wenn die Krümmung der Dauben keine elliptische ist, oder wenn überhaupt die Art derselben nicht festgestellt werden kann, pflegt man die Berechnung des Rauminhalts des Fasses in folgender Weise auszuführen.

Man vermehrt die doppelte Spundtiefe um die Bodenweite und dividirt die gefundene Summe durch 3. Das Ergebniß ist der Durchmesser eines Kreises, welcher als Grundfläche eines Cylinders angesehen wird, dessen Höhe mit der Länge des Fasses übereinstimmt. Der Rauminhalt dieses Fasses ist derjenige des zu berechnenden Fasses.

Hiernach findet sich bei obiger Bezeichnung der Rauminhalt des Fasses =

$$h \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left(\frac{2\,D + d}{3}\right)^2. \text{ (II.)}$$

Beispiel. Ein 84 cm. langes Faß hat 46 cm. Spundtiefe und 34 cm. Bodenweite. Wie viel beträgt sein Rauminhalt?

Doppelte Spundtiefe = 2 × 46 = 92 cm.
Bodenweite = 34 „
zusammen 126 cm.
$^1/_3$ dieser Summe beträgt $^{126}/_3$ = 42 cm.

Hiernach ist das Faß gleich einem 84 cm. hohen Cylinder, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 42 cm. hat. Mithin enthält das Faß 84 × $^{11}/_{14}$ × 42 × 42 = 6 × 11 × 42 × 42 = 116424 ☐cm. = 116,424 ☐ dm. = 116,424 oder nahe $116^2/_5$ Liter.

Anmerk. Nach Formel I ergiebt sich im gegenwärtigen Beispiel ein Rauminhalt von 118,536 Liter.

Uebungsaufgaben. In einem Faß ist

Gegeben:			Gesucht:
Länge.	Spundtiefe	Bodenweite.	Liter.
456. 60 cm.	49 cm.	28 cm.	83,16
457. 63 „	50 „	40 „	107,8
458. 70 „	60 „	30 „	137,5
459. 84 „	63 „	42 „	206,976
460. 60 „	48 „	30 „	83,16

Der Schüler berechne den Rauminhalt jedes Fasses in Aufg. 451 — 460 gleichzeitig nach Formel I. und II.

3. Ein drittes Verfahren beruht auf nachstehendem Satze.

Das Faß ist annähernd gleich der Summe zweier abgestumpfter Kegel, von denen jeder den größten senkrechten Querdurchschnitt (Kreisfläche der Spundtiefe) des Fasses zur Grundfläche und die halbe Länge desselben zur Höhe hat.

Beispiel. Ein 60 cm. langes Faß hat 49 cm. Spundtiefe und 28 cm. Bodenweite. Wie viel Liter kann es fassen?

Der größte senkrechte Querdurchschnitt zerlegt das Faß in zwei abgekürzte Kegel, von denen jeder bei $^{60}/_{2} = 30$ cm. Höhe eine Grundfläche von 49 cm. und eine Deckfläche von 28 cm. Durchmesser hat.

In jedem dieser beiden abgekürzten Kegel beträgt die halbe Summe der beiden Durchmesser $\frac{49 + 28}{2} = {}^{77}/_{2}$ cm., mithin der Inhalt der mittleren Durchschnittsfläche $= {}^{77}/_{2} \times {}^{77}/_{2} \times {}^{11}/_{14}$ □cm., der Inhalt der Ergänzungsfigur $= {}^{21}/_{2} \times {}^{21}/_{2} \times {}^{11}/_{14}$ □m., folglich der Kubikinhalt des Fasses $60 \,.\, {}^{11}/_{14} \,.\, \left(\frac{77 \,.\, 77}{2 \,.\, 2} + \frac{21 \,.\, 21}{3 \,.\, 2 \,.\, 2}\right) = 15 \,.\, {}^{11}/_{14} \,(78^2 + {}^{1}/_{3} \,.\, 21^2) =$
$15 \,.\, 11 \,.\, {}^{7}/_{2} \,.\, (11 \,.\, 11 + 3) = \frac{15 \,.\, 11 \,.\, 7 \,.\, 124}{2} =$
$15 \,.\, 11 \,.\, 7 \,.\, 62 \,. = 71610$ ⧉cm. $= 71{,}610$ ⧉dm., welche 71,61 Liter ergeben. Dieser Inhalt ist aber, wie das Resultat der Aufg. 456 zeigt, zu klein.

Anmerk. Brauer, Böttcher und andere Personen, welche den Litergehalt von Bottichen und Fässern 2c. oft zu bestimmen haben, bedienen sich zu diesem Zwecke der bei Gustav Eichler in Berlin erschienenen Tabellen von Wilh. Neisch und Dr. Winkler. Dieses sorgfältig gearbeitete Werk verlangt, daß man Durchmesser u. Höhe des Gefäßes ermittle, und giebt hierzu den gesuchten Rauminhalt in übersichtlicher Reihenfolge genau an.

§ 32.

Das (elliptische) Sphäroid und der parabolische Kegel.

1. Denken wir uns ein Faß (Tonne) mit elliptischer oder parabolischer Wölbung auf beiden Seiten über die ebenen Begrenzungsflächen hinaus verlängert, bis eine Rundung entsteht, so ergiebt sich im ersten Falle ein elliptisches Sphäroid, im zweiten Falle ein Körper, welcher aus zwei gleichen parabolischen Kegeln besteht.

Um ein Sphäroid zu bilden, hat man eine Ellipse entweder um ihre Längenachse oder um ihre Breitenachse herumzudrehen. Die in der Natur vorkommenden Sphäroide sind sämmtlich durch Umdrehung der Erzeugungs-Ellipse um die kleine (oder zweite) Achse derselben entstanden. Das Sphäroid wird von einer einzigen und zwar krummen Fläche begrenzt.

Ein Paraboloid oder ein parabolischer Kegel entsteht, wenn man eine Parabel um ihre Achse herumdreht. Der parabolische Kegel wird von einer krummen Seitenfläche und einer kreisförmigen ebenen Grundfläche begrenzt.

2. Jedes Sphäroid beträgt genau $^2/_3$ seines Cylinders, d. h. desjenigen Cylinders, welcher bei derselben Höhe den größten senkrechten Querdurchschnitt des Sphäroids zur Grundfläche hat.

Ist z. B. das Sphäroid durch Umdrehung einer Ellipse um ihre große Achse entstanden, so hat der Cylinder, welchen man sich um das Sphäroid beschrieben denkt, die kleine Achse zum Durchmesser der Grundfläche und die große Achse zur Höhe. Wird daher die Längenachse mit a, die Breitenachse mit b bezeichnet, so ist im einschließenden Cylinder die Höhe = a, der Durchmesser der Grundfläche = b, und daher der Inhalt der letzteren $= b^2 \cdot \frac{\pi}{4}$, folglich der Kubikinhalt des Cylinders $= a \cdot b^2 \cdot \frac{\pi}{4}$, woraus sich die Größe des eingeschlossenen Sphäroids ergiebt, nämlich $= {}^2/_3 \cdot a \cdot b^2 \cdot \frac{\pi}{4} =$

$$a \,.\, b^2 \,.\, \frac{\pi}{6},$$

und zwar unter der Voraussetzung, daß sich die Erzeugungs-Ellipse um die Achse a gedreht hat.

Erfolgt aber die Umdrehung der Ellipse um die kleine Achse b derselben, so hat der Cylinder, den man sich um das hierdurch entstehende Sphäroid beschrieben denkt, die große Achse zum Durchmesser seiner Grundfläche und die kleine Achse b zur Höhe. Mithin ist der Kubikinhalt dieses Cylinders $=$

$a^2 \,.\, b \,.\, \frac{\pi}{4}$, also derjenige des eingeschlossenen Sphäroids $=$

$^2/_3 \,.\, a^2 \,.\, b \,.\, \frac{\pi}{4} =$

$$a^2 \,.\, b. \frac{\pi}{6}.$$

Die beiden erwähnten Sphäroide, denen eine und dieselbe Ellipse als Erzeugungs-Figur zu Grunde liegt, verhalten sich ihrem Kubikinhalte nach wie

$$a\,b^2 \,.\, \frac{\pi}{6} : a^2\,b \,.\, \frac{\pi}{6},$$

oder wenn man auf beiden Seiten durch $\frac{ab\pi}{6}$ dividirt, wie:

$$b : a,$$

d. i. wie die kleine Achse zu der großen.

Beispiel. Die Erde ist sehr nahe ein durch Drehung um die kleine Achse entstandenes Sphäroid, dessen Achsen bezüglich 1720 und 1714 Meilen betragen. Wie viel Kubikmeilen enthält hiernach der Erdkörper?

Der um die Erde beschriebene Cylinder ist 1714 Meilen hoch. Der Durchmesser seiner Grundfläche beträgt 1720 Meilen; mithin der Inhalt dieser Grundfläche $1720^2. \frac{\pi}{4}$ □ Meilen.

Daher enthält der erwähnte Cylinder $1714 \times 1720^2 \times \frac{\pi}{4}$

⧉ Meilen, also das von ihm eingeschlossene Sphäroid $^2/_3 \times 1714 \times 1720^2 \times \frac{\pi}{4} = 1714 \times 1720^2 \times \frac{\pi}{6}$ ⧉ Meilen.

Wird nun $\pi = {}^{22}/_7$, also $\frac{\pi}{6} = {}^{11}/_{21}$ gesetzt, so findet sich hieraus die Größe des Erdkörpers $= {}^{11}/_{21} \times 1714 \times 1720^2 = {}^{11}/_{21} \times 1714 \times 1720 \times 1720 = 2656079695$ oder in runder Zahl 2656 Millionen Kubikmeilen.

Uebungsaufgaben. In einem Sphäroid ist

	Gegeben:		Gesucht:
	Feststehende Achse.	Bewegte Achse.	Kubikinhalt.
461.	14 m.	12 m.	1056 ⧉ m.
462.	12 „	14 „	1232 „
463.	7 „	6 „	132 „
464.	6 „	7 „	154 „
465.	21 „	18 „	3564 „
466.	18 „	21 „	4158 „

3. Ein parabolischer Kegel beträgt genau die Hälfte eines Cylinders, der mit ersterem gleiche Grundfläche und gleiche Höhe hat. Werden zwei gleiche parabolische Kegel mit ebenen Begrenzungsflächen an einander gelegt, so sind dieselben zusammengenommen halb so groß als ein Cylinder, welcher die Summe ihrer Achsen zur Höhe und ihre (kreisförmige) ebene Begrenzungsfläche zur Grundfläche hat.

Beispiel. Ein parabolischer Kegel mit 49 cm. langer Achse hat einen Kreis von 14 cm. Durchmesser zur Grundfläche. Wie viel beträgt der Kubikinhalt?

Radius der Grundfläche $= {}^{14}/_2 = 7$ cm.
Inhalt der Grundfläche $= 7 \times 7 \times {}^{22}/_7 = 154$ □ m.
Kubikinhalt des parabolischen Kegels $= \frac{49 \times 154}{2} = 49 \times 77 = 3773$ ⧉ cm

Uebungsaufgaben. In einem parabolischen Kegel ist

	Gegeben:		Gesucht:
	Radius der Grundfläche.	Höhe.	Kubikinhalt.
467.	2 m.	7 m.	44 □m.
468.	3 „	$15^3/_4$ „	$222^3/_4$ „
469.	4 „	28 „	704 „
470.	6 „	63 „	3564 „

Anmerk. Die Parabel ist eine krumme Linie, welche sich nie schließt, indem sich die Schenkel derselben immer weiter von der Achse entfernen. Um eine Parabel zu erhalten, hat man einen Kegel so zu schneiden, daß die (ebene) Schnittfläche mit einer Seitenlinie des Kegels parallel läuft.

Die Quadrate der Ordinaten einer Parabel verhalten sich wie die zugehörigen Abscissen.

Bei der Umdrehung der Parabel um ihre Achse (Abscissen-Linie) wird letztere die Höhe eines Paraboloids, dessen Grundfläche eine Ordinate der Parabel zum Radius hat.

Die Ellipse ergiebt sich, wenn die durch den Kegel gelegte Ebene beide Seiten des Kegels schneidet und gegen die Grundfläche desselben schief gerichtet ist.

Der Flächeninhalt einer Ellipse verhält sich zu dem des umbeschriebenen Kreises, wie die kleine Achse zur großen.

Die Hyperbel, der dritte der drei Kegelschnitte, entsteht, wenn ein Doppelkegel (durch zwei gleiche, mit ihren Spitzen scheitelartig zusammentreffende Kegel gebildet) so geschnitten wird, daß die schneidende Ebene die Oberfläche beider Kegel trifft. Zur Hyperbel gehören also zwei getrennte symmetrische Zweige, von denen jeder zwei symmetrische, ins Unendliche fortlaufende Schenkel (Bogen) hat.

§ 33.

Die Kugel.

1. Wenn ein Halbkreis (Kreis) um seinen Durchmesser herumgedreht wird, so beschreibt die krumme Linie des Halbkreises (Kreises) eine in sich zurücklaufende krumme Fläche, die Kugelfläche. Der von dieser Fläche vollig eingeschlossene Körper heißt eine Kugel. Der Mittelpunkt des Erzeugungskreises wird zum Mittelpunkt der Kugel. Jeder Punkt der Kugelfläche steht gleich weit vom Mittelpunkt der Kugel ab, und sind daher die Radien oder Halbmesser derselben gleich. Dasselbe gilt von allen Durchmessern der Kugel. Wird eine

Kugel in der Richtung eines Durchmessers durchschnitten, so geht die Schnittebene durch den Mittelpunkt (das Centrum) der Kugel und es entstehen zwei Halbkugeln, von denen jede eine ebene Grundfläche hat. Letztere ist eine größte Kreisfläche der Kugel. Der Umfang der größten Kreisfläche, ein größter Kugelkreis (Kreislinie) genannt, ist zugleich der (größte) Umfang der Kugel.

2. Um den Umfang der Kugel zu erhalten, multiplicire man ihren Durchmesser mit π (annähernd mit $^{22}/_{7}$).

Wird der Umfang mit dem Durchmesser multiplicirt, so findet sich der Inhalt der Kugelfläche.

Um den Kubikinhalt der Kugel zu berechnen, multiplicire man den Inhalt der Kugelfläche mit dem dritten Theil des Kugelradius; denn die Kugel ist gleich einem Kegel, der die Oberfläche derselben zur Grundfläche und den Kugelradius zur Höhe hat.

Der Kubikinhalt der Kugel wird aber auch gefunden,

a. wenn man den Kubus (Würfel) ihres Durchmessers mit $\frac{\pi}{6}$ (d. i. annähernd $^{11}/_{21}$) multiplicirt.

b. wenn man $^{2}/_{3}$ des um die Kugel beschriebenen Cylinders nimmt. Dieser Cylinder hat die größte Kreisfläche der Kugel zur Grundfläche und den Durchmesser derselben zur Höhe.

Bezeichnet man nun den Durchmesser der Kugel mit d, ihren Radius mit r, ihre Oberfläche mit O, ihr Volumen (Kubikinhalt) mit V, so ist der Umfang der Kugel $= d\pi$ und

$$O = d^2 \,.\, \pi = 4r^2 \,.\, \pi.$$

$$V = d^2 \,.\, \frac{\pi}{6} = {}^{4}/_{3} \,.\, r^3 \,.\, \pi.$$

Beispiel 1. Der Durchmesser einer Kugel beträgt 21 cm. Wie groß ist a. der Umfang, b. die Oberfläche, c. der Kubikinhalt derselben?

a. Umfang $= 21 \times {}^{22}/_{7} = 3 \times 22 = 66$ cm.

b. Oberfläche $= 21 \times 21 \times {}^{22}/_{7} = 21 \times 66 = 1386$ □cm.

c. Kubikinhalt $= \frac{\text{Oberfläche} \times \text{Radius}}{3}$; Radius $= 21/_{2}$ cm.

Daher Kubikinhult $= 1386 \times {}^{7}/_{2} = 693 \times 7 = 4851$ ⧉cm. Auch ist der Kubikinhalt $= 21 \times 21 \times 21 \times {}^{11}/_{21} = 21 \times 21 \times 11 = 4851$ ⧉cm.

Wird die Kugel aus dem um sie beschriebenen Cylinder berechnet, so findet sich zunächst:

Die größte Schnittfläche der Kugel $= {}^{21}/_{2} \times {}^{21}/_{2} \times {}^{22}/_{7} = \frac{21 \times 3 \times 11}{2} = {}^{693}/_{2}$ □cm. als Grundfläche des erwähnten Cylinders. Da derselbe 21 cm. hoch ist, so beträgt der Kubinhalt dieses Cylinders $\frac{693 \times 21}{2} = {}^{14553}/_{2}$ ⧉cm.

Mithin enthält die Kugel, als ${}^{2}/_{3}$ des erwähnten Cylinders, ${}^{2}/_{3} \times \frac{14553}{2} = \frac{14553}{3} = 4851$ ⧉cm.

Beispiel. 2. Eine Halbkugel hat 14 cm. Durchmesser. Es soll ihr Kubikinhalt und ihre Oberfläche gefunden werden.

Die ganze Kugel enthält $14 \times 14 \times 14 \times {}^{11}/_{21}$ ⧉cm. folglich die Halbkugel $7 \times 14 \times 14 \times {}^{11}/_{21} = 14 \times 14 \times {}^{11}/_{3} = 718{}^{2}/_{3}$ ⧉cm.

Die ganze Kugelfläche ist $= 14 \times 14 \times {}^{22}/_{7} = 14 \times 44$ □cm., mithin die halbe Kugelfläche $= 7 \times 44$
$= 308$ □cm. Hierzu
die Grundfläche
der Halbkugel $= 14 \times 14 \times {}^{11}/_{14}$ $= 154$ „
ergiebt die Oberfläche der Halbkugel $= 462$ □cm.

Beispiel 3. Ein Kessel von der Form einer Halbkugel hat an der Oeffnung einen Durchmesser von 42 cm. Wie viel Liter kann er fassen?

Der Kessel enthält ${}^{1}/_{2} \times 42 \times 42 \times 42 \times {}^{11}/_{21} = 42 \times 42 \times 11 = 19404$ ⧉cm. $= 19{,}404$ ⧉dm., welche 19,404 oder nahe $19{}^{2}/_{5}$ Liter ergeben.

Uebungsaufgaben. In einer Kugel ist

Gegeben:	Gesucht:	
Durchmesser.	Oberfläche.	Kubikinhalt.
471. 7 cm.	154 □cm.	$179{}^{2}/_{3}$ ⧉cm.
472. 14 „	616 „	$1427{}^{1}/_{3}$ „

Durchmesser.	Oberfläche.	Kubikinhalt.
473. 21 cm.	1386 □cm.	4851 ⧉cm.
474. 28 „	2464 „	$11498^2/_3$ „
475. 35 „	3850 „	$22458^1/_3$ „

3. Ist der Umfang einer Kugel gegeben, so dividire man denselben durch π, wodurch sich der Durchmesser derselben findet. Aus diesem Durchmesser ergiebt sich in bekannter Weise die Oberfläche und der Kubikinhalt der Kugel. Derselbe Zweck kann aber auch ohne besondere Berechnung des Durchmessers erreicht werden; nämlich:

a. Die Quadratzahl des Umfangs durch π dividirt, ergiebt den Inhalt der Kugelfläche.

b. Dividirt man den 6. Theil der Kubikzahl des Umfangs durch π^2 (annähernd $^{484}/_{49}$), so findet sich der Kubikinhalt der Kugel.

Beispiel. Es soll der Durchmesser, die Oberfläche und der Kubikinhalt einer Kugel von 1,32 m. Umfang berechnet werden.

Durchmesser $= \frac{1,32 \times 7}{22} = 0,06 \times 7 = 0,42$ m.

Oberfläche $= 0,42 \times 0,42\ ^{22}/_7 = 0,42 \times 0,06 \times 22$ $= 0,5544$ □m., oder $1,32 \times 1,32 \times {}^7/_{22} = 1,32 =$ $0,06 \times 7 = 0,5544$ □m.

Kubikinhalt $= 0,42 \times 0,42 \times 0,42 \times {}^{11}/_{21} = 0,42 \times$ $0,42 \times 0,02 \times 11 = 0,038808$ ⧉m., oder

$$\frac{1,32 \times 1,32 \times 1,32 \times 49}{6 \times 484} = \frac{0,0132 \times 1,32 \times 49}{22}$$

$= 0,038808$ ⧉m.

Uebungsaufgaben. In einer Kugel ist

Gegeben:	Gesucht:	
Umfang.	Oberfläche.	Kubikinhalt.
476. 22 cm.	154 □cm.	$179^2/_3$ ⧉m.
477. 22 „	1386 „	4851 „
478. 110 „	3850 „	$22458^1/_3$ „
479. 44 „	616 „	$1437^1/_3$ „
480. 88 „	2464 „	$11498^2/_3$ „

4. Auch aus der Oberfläche einer Kugel können Durchmesser, Umfang und Kubikinhalt der letzteren unmittelbar gefunden werden, und zwar nach folgenden Regeln, resp. Formeln.

a. Um den Durchmesser zu finden, hat man den Inhalt der Kugelfläche durch π zu dividiren und aus dem Quotienten die Quadratwurzel zu ziehen, also

$$d = \sqrt{\frac{O}{\pi}}.$$

b. Die Quadratwurzel aus der mit π multiplicirten Kugelfläche ergiebt den Umfang (u) der Kugel, also

$$u = \sqrt{O \,.\, \pi}$$

c. Der Kubikinhalt (V) einer Kugel wird gefunden, wenn man $^1/_6$ der Oberfläche mit der Quadratwurzel der durch π dividirten Kugelfläche multiplicirt, also

$$V = \frac{O}{6} . \sqrt{\frac{O}{\pi}}.$$

Beispiel. Die Oberfläche einer Kugel soll 616 □ cm. betragen. Wie groß muß der Durchmesser, der Umfang und der Kubikinhalt dieser Kugel sein?

Durchmesser $= \sqrt{\frac{616 \,.\, 7}{22}} = \sqrt{28 \,.\, 7} = \sqrt{4 \,.\, 49} = 2 \,.\, 7 = 14$ cm.

Umfang $= \sqrt{\frac{616 \,.\, 22}{7}} = \sqrt{88.22} = \sqrt{4^2 \,.\, 11^2} = 4 \,.\, 11 = 44$ cm.

Kubikinhalt $= {}^{616}/_6 \,.\, \sqrt{\frac{616 \,.\, 7}{22}} = \frac{616 \,.\, 14}{6} = \frac{616 \,.\, 7}{3} = 1437^1/_3$ ⧉ cm.

Uebungsaufgaben. In einer Kugel ist

Gegeben: Oberfläche.	Gesucht: Durchmesser.	Kubikinhalt.
481. 1,00 □ m.	0,56419 m.	0,09403 ⧉ m.
482. 1,50 "	0,69099 "	0,17274 "
483. 1,60 "	0,71365 "	0,19031 "

Gegeben:		Gesucht:		
	Oberfläche.	Durchmesser.	Kubikinhalt.	
484.	1,70 □ m.	0,73561 m.	0,20842 ⧉ m.	π = 3,1415927.
485.	1,80 „	0,75694 „	0,22708 „	
486.	1,98 „	0,79388 „	0,26198 „	
487.	2,00 „	0,79788 „	0,26596 „	
488.	2,25 „	0,84628 „	0,31735 „	
489.	2,50 „	0,89206 „	9,37169 „	
490.	2,75 „	0,93549 „	0,42877 „	

5. Zur Berechnung des Durchmessers, des Umfangs und der Oberfläche einer Kugel, deren Kubikinhalt gegeben ist, dienen folgende Regeln.

a. Man erhält den Durchmesser, wenn man aus dem durch $\frac{\pi}{6}$ dividirten Kugelinhalt die Kubikwurzel zieht, d. i.

$$d = \sqrt{\frac{6 \cdot V}{\pi}}.$$

b. Die Kubikwurzel aus dem mit $6\,\pi^2$ (annähernd $^{2904}/_{49}$) multiplicirten Kugelinhalt ergiebt den Umfang, nämlich

$$u = \sqrt[3]{6 \cdot V \cdot \pi^2}.$$

c. Der Inhalt der Kugelfläche wird gefunden, wenn man die Quadratzahl des Kubikinhalts mit $36\,\pi$ multiplicirt und aus dem Produkte die Kubikwurzel zieht, d. i.

$$O = \sqrt[3]{36\,V^2 \cdot \pi}$$

oder annähernd, wenn man die Quadratzahl des Kubikinhalts mit $^{99}/_{7}$ multiplicirt, aus dem Produkte die Kubikwurzel zieht und letztere schließlich verdoppelt d. i.

$$O = 2\sqrt[3]{V^2 \cdot {}^{99}/_{7}}.$$

Beispiel. Man soll den Durchmesser, den Umfang und die Oberfläche einer 4851 ⧉ cm. großen Kugel berechnen.

Durchmesser $= \sqrt[3]{4851 \cdot {}^{21}/_{11}} = \sqrt[3]{441 \cdot 21} = \sqrt[3]{21^3} =$ 21 cm.

Umfang $= \sqrt[3]{6 \,.\, 4851 \,.\, {}^{22}/_{7} \,.\, {}^{22}/_{7}} = \sqrt[3]{6 \,.\, 99 \,.\, 22 \,.\, 22} =$ $11 \,.\, \sqrt[3]{6 \,.\, 9 \,.\, 2 \,.\, 2} = 22 \sqrt[3]{3 \,.\, 9} = 22 \sqrt[3]{3^3} =$ $22 \,.\, 3 = 66$ cm.

Oberfläche $= 2 \,.\, \sqrt[3]{4851 \,.\, 4851 \,.\, {}^{99}/_{7}} = 22 \sqrt[3]{4851 \,.\, 693 \,.\, 99}$ $= 2 \sqrt[3]{693^3} = 2 \,.\, 693 = 1386$ □ cm.

Uebungsaufgaben. In einer Kugel ist

($\pi = 3{,}1415927$)

	Gegeben: Kubikinhalt.	Gesucht: Durchmesser.	Oberfläche.
491.	1 ⧉m.	1,2407 m.	4,8360 □m.
492.	1,2 "	1,3184 "	5,4610 "
493.	1,5 "	1,4202 "	6,3369 "
494.	1,6 "	1,4511 "	6,6155 "
495.	1,8 "	1,5092 "	7,1559 "
496.	1,9 "	1,5368 "	7,4185 "
497.	2 "	1,5632 "	7,6767 "
498.	2,5 "	1,6839 "	8,9079 "
499.	2,8 "	1,7487 "	9,6070 "
500.	3 "	1,7894 "	10,0592 "

6. Soll die Körpermasse einer Hohlkugel berechnet werden, so hat man die Kubikzahl des innern Durchmessers von derjenigen des Durchmessers der ausgefüllt gedachten Kugel zu subtrahiren und den gefundenen Rest mit $\frac{\pi}{6}$ (d. i. annähernd ${}^{11}/_{21}$) zu multipliciren.

Der Unterschied der beiden Kugelradien ergiebt die Dicke der Kugelrinde.

Beispiel. Die beiden Durchmesser einer Hohlkugel betragen bezüglich 35 cm. und 33 cm. Es soll die Dicke und die Körpermasse der Kugelrinde berechnet werden. ($\pi = 3{,}1415927$).

Die Dicke der Kugelwand beträgt ${}^{35}/_{2} - {}^{33}/_{2} = 1$ cm.

Die Kugelrinde enthält $(35^3 - 33^3) \,.\, \frac{\pi}{6} = (42875 - 35937).$

$\frac{\pi}{6} = 6938 . \frac{\pi}{6} = 6938 . 0,5235988 = 3632,73$ □cm. annähernd.

Der innere leere Raum der Hohlkugel beträgt $33^3 . \frac{\pi}{6} =$ 18816,56 □cm. = 18,81656 □dm. und kann daher nahe $18^4/_5$ Liter fassen.

Anmerk. Die Körpermasse einer hohlen Halbkugel ist $= \frac{\pi}{12}$ des Unterschieds der beiden Durchmesser-Würfel.

Uebungsaufgaben. In einer Hohlkugel ist

$\pi = 3,1415927$

Gegeben: Dicke der Kugelrinde.	Der große Durchmesser.	Gesucht: Der innere Durchmesser.	Masse der Kugelrinde.
501. 1 cm.	40 cm.	38 cm.	0,004779 □m.
502. 1 „	50 „	48 „	0,008068 „
503. $1^1/_2$ „	60 „	57 „	0,016130 „
504. $1^1/_2$ „	59 „	56 „	0,015584 „
505. 2 „	84 „	80 „	0,042256 „

Anmerk. Die Kugel hat das Maximum des Volumens und das Minimum der Oberfläche, d. h.

a. Unter allen Körpern von gleicher Oberfläche hat die Kugel den größten Kubikinhalt.

b. Unter allen Körpern von gleichem Kubikinhalt hat die Kugel die kleinste Oberfläche.

§ 34.

Theile der Kugel.

1. Wenn man eine Ebene durch eine Kugel legt, so zerfällt letztere in zwei Kugel-Segmente oder Kugel-Abschnitte und jedes Stück der ein Kugel-Segment begrenzenden Kugelfläche heißt Calotte oder Kugelmütze.

Jedes Kugel-Segment wird von einer ebenen Kreisfläche, als Grundfläche, und einer Calotte, als Mantel, begrenzt.

Wird auf der ebenen Grundfläche des Kugel-Segments ein Kegel errichtet, dessen Spitze in den Mittelpunkt der Kugel

fällt, so bildet die Summe dieses Kegels und des vorerwähnten Kugel-Segments einen Kugel-Sector.

Der Kugel-Sector oder Kugelausschnitt, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt, wird von einer Calotte und einem Kegelmantel begrenzt. Die Calotte ist seine Grundfläche, der Kugelradius seine Höhe.

Die Kugel-Zone oder körperliche Zone wird von zwei parallelen Kugel-Kreisflächen und einem zwischen denselben befindlichen Theile der Kugelfläche, Zone (oder Gürtel) genannt, begrenzt. Die ebenen Kreisflächen der körperlichen Zone bezeichnet man als Grund- und Deckfläche. Der senkrecht Abstand der Deckfläche von der Grundfläche ist die Höhe der Kugelzone. Diese Höhe ist, gleichviel ob die Kugelzone den Mittelpunkt der Kugel enthält oder nicht, stets ein Theil des Kugel-Durchmessers.

2. Die Calotte ist gleich dem Mantel eines senkrechten Cylinders, welcher die größte Schnittfläche der Kugel zur Grundfläche und die Höhe der Calotte zur Höhe hat.

Der Flächeninhalt einer Zone ist ebenso groß als der Mantel eines senkrechten Cylinders, welcher die größte Schnittfläche der Kugel zur Grundfläche und die Höhe der Zone zur Höhe hat.

Es werden also Calotte und (Flächen-)Zone in gleicher Weise berechnet.

Bezeichnet man den Durchmesser der Kugel mit d, den Radius derselben mit r, die Höhe der zugehörigen Calotte, resp. Zone, mit h, so ist allgemein

der Flächeninhalt der

Calotte $= d\pi \, . \, h$ oder $2r\pi \, . \, h$ . .

Zone $= d\pi \, . \, h$ oder $2r\pi \, . \, h$ . .

Beispiel. 1. Zu einer Kugel von 14 cm. Durchmesser gehört eine Calotte von 5 cm. Höhe. Wie viel beträgt der Inhalt der Calotte? ($\pi = {}^{22}/_{7}$.)

$$14 \, . \, {}^{22}/_{7} \, . \, 5 = 2 \, . \, 22 \, . \, 5 = 220 \; \square \text{cm.}$$

Beispiel 2. In einer Kugel von 20 cm. Durchmesser ge-

hört eine Zone von 8 cm. Höhe. Welchen Flächeninhalt hat diese Zone? ($\pi = 3{,}1415927.$)

$$20 \,.\, \pi \,.\, 8 = 160\,\pi = 502{,}6548 \;\square\text{cm.}$$

Uebungsbeispiele ($\pi = 3{,}1415927.$)

Gegeben: Durchmesser der Kugel.	Höhe der Calotte oder Zone.	Gesucht: Inhalt der Calotte oder Zone.
506. 20 cm.	5 cm.	314,1593 □cm.
507. 10 "	4 "	125,6637 "
508. 30 "	10 "	942,4778 "
509. 18 "	6 "	339,2920 "
510. 12 "	5 "	188,8496 "

3. Der Kugelsector ist gleich einem Kegel, welcher die Calotte des ersteren zur Grundfläche und den Kugelradius zur Höhe hat. Daher ist sein Kubikinhalt =

$$\tfrac{2}{3} \,.\, r^2 \,.\, \pi \,.\, h,$$

wo r den Kugelradius, h die Höhe der Calotte (d. i. des zugehörigen Kugel-Segments) bezeichnet.

Die ganze Oberfläche des Kugelsectors wird gefunden, wenn man den größten Umkreis der Kugel mit der Summe aus der Calottenhöhe und dem halben Radius des die Calotte begrenzenden Kugelkreises multiplicirt.

Beispiel. In einem Kugelsector mit 4 cm. hoher Calotte beträgt der Kugelradius $6\tfrac{1}{2}$ cm. Es soll die Oberfläche uud der Kubikinhalt dieses Körpers berechnet werden. ($\pi = 3{,}1415927.$)

Bezeichnet man den Radius des die Calotte begrenzenden Kugelkreises mit x, so ist x die unbekannte Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, in welchem die Hypotenuse = $6\tfrac{1}{2}$ cm., die andere Kathete (als Abstand des vorerwähnten Kugelkreises von dem Mittelpunkte der Kugel) = $6\tfrac{1}{2} - 4 = 2\tfrac{1}{2}$ cm. gegeben ist. Hiernach findet sich

$$x^2 = (6\tfrac{1}{2})^2 - (2\tfrac{1}{2})^2$$

$$= {}^{169}\!/_4 - {}^{25}\!/_4 = \frac{169 - 25}{4} = {}^{144}\!/_4$$

$$= 36;$$

$$\text{also } x = 6 \text{ cm.}$$

Mithin ist die Oberfläche des Kugelsectors = 13 π . (4 + 3) = 91 π = 285,8849 □cm., da
der größte Kugelumfang 2 . $6\frac{1}{2}$. π cm.
die Höhe der Calotte 4 „
der halbe Radius des Kugelkreises 3 „
beträgt.

Ferner ist der Inhalt der Calotte = 13 π . 4 = 52 π □cm., der dritte Theil des Kugelradius = $\frac{6\frac{1}{2}}{3}$ = $\frac{13}{6}$ cm., folglich der Kubikinhalt des Kugelsectors = 52 π . $\frac{13}{6}$ = $\frac{26 . 13 . \pi}{3}$ = 353,9528 ⧉cm. annähernd.

Uebungsbeispiele. In einem Kugelsector ist

Gegeben:		Gesucht:	
Kugelradius.	Calottenhöhe.	Kubikinhalt.	Oberfläche.
511. 10 cm.	4 cm.	80 π ⧉cm.	160 π □cm.
512. 15 „	3 „	90 π „	225 π „
513. $12\frac{1}{2}$ „	5 „	125 π „	250 π „
514. $14\frac{1}{2}$ „	4 „	116 π „	261 π „
515. $12\frac{1}{2}$ „	9 „	$\frac{1875 \pi}{2}$ „	375 π „

4. Wenn Kugelradius (r) und Calottenhöhe (h) gegeben sind, so ist der Kubikinhalt des Kugelsegments =

$$\frac{1}{2} . h^2 . (3r - h) . \pi$$

$$\text{oder} \quad h^2 . \left(r - \frac{h}{3}\right) . \pi,$$

wo $h^2 \pi$ als die Grundfläche und $r - \frac{h}{3}$ als die Höhe eines dem Kugelsegment inhaltsgleichen Cylinders betrachtet werden kann.

Der Kubikinhalt eines Kugelsegments läßt sich aber auch unmittelbar finden, wenn die Höhe desselben, sowie der Radius seiner Grundfläche (statt des Kugelradius) gegeben ist. Wird nämlich der Radius der Grundfläche des Kugelsegments mit a bezeichnet, so ergiebt sich der Kubikinhalt dieses Körpers =

$$h\,(3a^2 + h^2) . \frac{\pi}{6}.$$

Nach dieser Formel, welche folgendermaßen umgestaltet werden kann:

$$(a^2 \pi \,.\, {}^1\!/_2 h) + (h^3 \,.\, \frac{\pi}{6})$$

ist das Kugelsegment gleich der Summe eines Cylinders und einer Kugel, von denen der Cylinder die ebene Begrenzungsfläche des Kugelsegments zur Grundfläche und die halbe Höhe desselben zur Höhe, die Kugel hingegen die halbe Höhe des Segments zum Radius, also die ganze Höhe des Segments zum Durchmesser hat.

Nach Nr. 3 bilden der erwähnte Radius a (daselbst mit x bezeichnet) und der Abstand (r — h) der Grundfläche des Segments vom Kugelcentrum, als Katheten, mit dem Kugelradius r, als Hypotenuse, ein rechtwinkliges Dreieck, und ist daher allgemein

$$\begin{aligned} a^2 &= r^2 - (r - h)^2 \\ &= r^2 - (r^2 - 2rh + h^2) \\ &= 2rh - h^2 \\ &= h\,(2r - h), \end{aligned}$$

woraus folgt $a = \sqrt{h\,(2r - h)},$

d. h. der Radius der Grundfläche des Kugelsegments wird gefunden, wenn man den Durchmesser der Kugel um die Höhe des Segments vermindert, den Rest mit dieser Höhe multiplicirt und aus dem Produkte die Quadratwurzel zieht.

Bei obiger Bezeichnung ist die aus einer Calotte und einer ebenen Kreisfläche bestehende Oberfläche des Kugelsegments =

$$(2\, a^2 + h^2)\, \pi,$$

welcher Ausdruck sich auflösen läßt in

$$(2\, a^2\, \pi) + (h^2\, \pi).$$

Hierdurch ist angedeutet:

Die Oberfläche des Kugelsegments ist gleich der Summe dreier Kreise, nämlich des doppelten Grundkreises und eines andern Kreises, welcher die Höhe des Segments zum Radius hat.

Beispiel 1. Ein Kugelsegment von 4 cm. Höhe gehört einer Kugel von 10 cm. Radius an. Man soll den Kubikinhalt und die Oberfläche dieses Kugelsegments berechnen.

Hier ist r = 10 cm. und h = 4 cm., also 3 r — h = 26 cm. und $\frac{h^2}{3} = {}^{16}/_3$, mithin der gesuchte Kubikinhalt = ${}^{16}/_3 \,.\, 26 \,.\, \pi = \frac{416 \,.\, \pi}{3} = 435{,}6341$ □cm.

Ferner ist 2r — h = 16 cm., also die Grundfläche des Kugelsegments = 4 . 16 . π = 64 π und demgemäß die Oberfläche desselben = 2 . 64 . π + 4^2 π = (128 + 16) . π = 144 π = 452,3893 □cm.

Uebungsaufgaben. In einem Kugelsegment ist

Gegeben:

	Kugelradius.	Radius der Grundfläche.	Höhe.
516.	$6^1/_2$ cm.		4 cm.
517.	15 "		3 "
518.	$12^1/_2$ "		5 "
519.		12 cm.	9 "
520.		10 "	4 "
521.		9 "	3 "

Gesucht:

Kubikinhalt.	Oberfläche.
$\frac{104 \,.\, \pi}{3}$ ⧆cm.	88 . π □cm.
126 . π "	171 . π "
$\frac{1625 \,.\, \pi}{6}$ "	225 . π "
$\frac{675 \,.\, \pi}{2}$ "	369 . π "
$\frac{232 \,.\, \pi}{3}$ "	216 . π "
126 π "	171 . π "

5. Die körperliche Zone ist gleich der Summe dreier Körper, nämlich zweier Cylinder und einer Kugel. Jeder der beiden erwähnten Cylinder hat die halbe Höhe der Zone zur Höhe, die Kugel hingegen die halbe Zonenhöhe zum Radius,

mithin die ganze Zonenhöhe zum Durchmesser. Grundfläche des einen Cylinders ist die Grundfläche der Zone, Grundfläche des andern Cylinders ist die Deckfläche derselben.

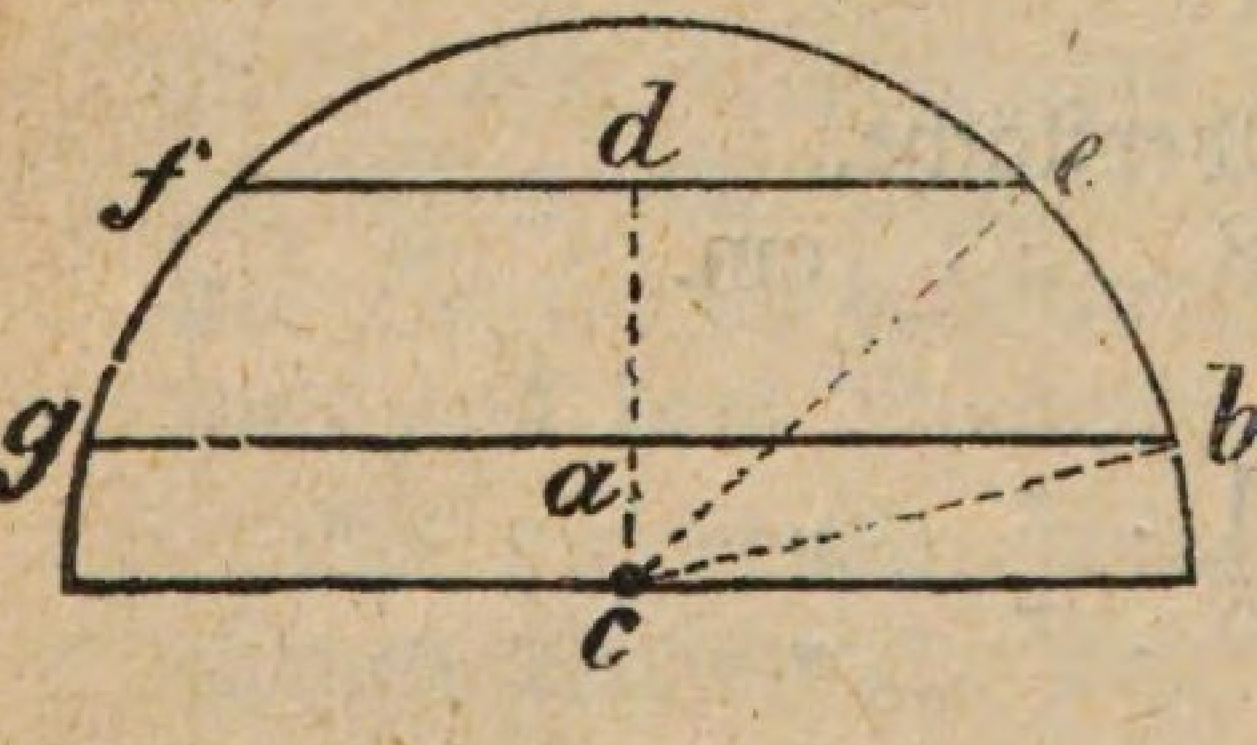
Wird also die Höhe der Zone mit h. der Radius der Grundfläche mit a, der Radius der Deckfläche mit b bezeichnet so ist der Kubikinhalt der Kugelzone $= a^2 \pi \frac{h}{2} + b^2 \pi \frac{h}{2} + h^3 \cdot \frac{\pi}{6} =$

$$\frac{h}{2} \cdot \left(a^2 + b^2 + \frac{h^2}{3}\right) \cdot \pi.$$

Die Radien a und b der Grund- und Deckfläche der körperlichen Kugelzone werden, wenn der Kugelradius, die Zonenhöhe und der Abstand der Zonen-Grundfläche vom Kugelcentrum gegeben sind, mit Hülfe des Pythagoräischen Lehrsatzes gefunden.

Beispiel. In einer körperlichen Kugelzone von 6 cm. Höhe beträgt der Abstand der Grundfläche vom Kugelcentrum 4 cm., während der Kugelradius = 14 cm. ist. Man soll den Kubikinhalt und die Oberfläche dieses Körpers berechnen.

Fig. 11.



Es sei in Fig. 11 febg eine körperliche Zone, die Höhe derselben ad = 6 cm., der Abstand der Grundfläche vom Kugelcentrum, nämlich ac = 4 cm. Hiernach ist die Linie ca + ad, d. i. die Linie cd = 4 + 6 = 10 cm., während der Kugelradius cb = ce = 14 cm. gegeben ist.

Wird nun der Pythagoräische Lehrsatz angewendet, so findet sich

$$ce^2 - cd^2 = de^2$$

d. i. $14^2 - 10^2 = de^2$,

oder wenn man die Linie de als Radius der Deckfläche mit b bezeichnet:

$$b^2 = 14^2 - 10^2 = 196 - 100 = 96 \square\text{cm.}$$

also $b = \sqrt{96}$ cm.

Ferner ist

$$ab^2 = cb^2 - ca^2,$$

$$\text{nämlich } ab^2 = 14^2 - 4^2,$$

oder wenn ab als Radius der Grundfläche mit a bezeichnet wird:

$$a^2 = 14^2 - 4^2 = 196 - 16 = 180 \; \square \text{cm.}$$

also $a = \sqrt{180}$ cm.

Setzt man nun $\frac{h}{2} = 3$, $a^2 = 180$, $b^2 = 96$ und $\frac{h^2}{3} = {}^{36}/_3 = 12$ in die oben mitgetheilte Formel ein, so findet sich der Kubikinhalt der Kugelzone =

$$3 \,.\, (180 + 96 + 12) \,.\, \pi = 3 \,.\, 288 \,.\, \pi = 864\,\pi.$$

d. i. 864 . 3,1415927 = 2714,336 ⧉cm.

Die Oberfläche der körperlichen Kugelzone besteht aus zwei ebenen Kreisflächen und einer Zone. Es enthält

die Grundfläche 180 π
die Deckfläche 96 π
die Zone 2 . 14 . π . 6 = 168 π

mithin die gesuchte Oberfläche 444 π = 1394,867 □cm.

Uebungsaufgaben. In einer körperlichen Kugelzone ist

Gegeben:

Kugelradius.	Höhe.	Abst. d. Grdfl. v. Centr. d. Grdfl.	Radius d. Grdfl.	Radius d. Deckfl.
522. 13 cm.	7 cm.	5 cm.		
523. 17 „	7 „	8 „		
524. 20 „	4 „	12 „		
525.	7 „		12 cm.	5 cm.
526.	7 „		15 „	8 „
527.	4 „		16 „	12 „

Gesucht:

Kubikinhalt.	Oberfläche.
$\frac{1946 \,.\, \pi}{3}$ ⧉ cm.	351 π □ cm.
$\frac{3206 \,.\, \pi}{3}$ „	527 π „

Kubikinhalt.	Oberfläche.
$\frac{2432 \cdot \pi}{3}$ Kbcm.	$560\ \pi$ □cm.
$\frac{1946 \cdot \pi}{3}$ "	$351\ \pi$ "
$\frac{3206 \cdot \pi}{3}$ "	$527\ \pi$ "
$\frac{3432 \cdot \pi}{3}$ "	$570\ \pi$ "

§ 35.

Gewölbe.

1. Man unterscheidet Kugel-, Chor-, Nischen-, Tonnen-, Kappen-, Spiegel-, Spitz-, Kloster-, Kreuz-, Stern-, Muldengewölbe u. a. m. Das *Tonnengewölbe* hat zur Bogenlinie einen vollen Halbkreis oder nur einen Theil desselben und wird, wenn es sehr lang ist, durch stärkere Bogen, *Gurtbogen* genannt, befestigt, welche gewöhnlich 4 bis 5 m. von einander entfernt im Gewölbe angelegt sind. Tonnengewölbe, welche auf Gurtbogen ruhen und nach flacheren Kreisabschnitten geformt sind, werden insbesondere *Kappengewölbe* genannt. *Kugel-* oder *Kuppelgewölbe* haben die Form einer Halbkugel oder eines halben Ellipsoids. Die Grundfläche (der Grundriß) eines solchen Gewölbes ist ein Kreis. Denkt man sich eine Ebene senkrecht auf dem Durchmesser dieses Kreises errichtet, so zerfällt das Kugelgewölbe in zwei gleiche Hälften, von denen jede mit dem Namen *Chorgewölbe* bezeichnet wird. Durch Halbirung eines Chorgewölbes entstehen zwei *Nischengewölbe*. Zwei sich durchschneidende Tonnengewölbe bilden ein *Kreuzgewölbe*, und die Durchschnittslinien, welche aus den Ecken nach dem Mittelpunkte eines solchen Gewölbes aufsteigen, erhalten den Namen *Gratbogen*. Kreuzgewölbe mit spitzbogenförmiger Wölbungslinie heißen *gothische*, *Kloster-* oder *Spitzgewölbe* und werden wegen ihrer Höhe nur bei Kirchen angewendet. *Muldengewölbe* sind Kreuzgewölbe mit nicht bemerkbaren Gratbogen. Trägt ein solches

Gewölbe oben eine glatte Fläche, den Spiegel, so wird es ein Spiegelgewölbe genannt. Wenn mehr als zwei Gewölbe einander schneiden, so entsteht ein Sterngewölbe, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Vieleck ist.

2. Gewölbe, die einen vollen Halbkreis oder einen kleineren Kreisbogen bilden, sind Theile einer Walze; und wird daher ihr Rauminhalt gefunden, wenn man den senkrechten Durchschnitt des Gewölbes mit der Länge desselben multiplicirt. Der senkrechte Durchschnitt der Steinlage, mit der Länge derselben multiplicirt, ergiebt den Kubikinhalt der Steinlage.

Beispiel 1. Ein halbkreisförmiges Tonnengewölbe von 7 m. Länge und 1 m. Stärke hat im Lichten eine Weite von $5\frac{1}{4}$ m. Wie groß ist der Inhalt des Gewölberaums, sowie der Kubikinhalt der Steinlage? Wie viel Hektoliter kann der Gewölberaum aufnehmen? ($\pi = {}^{22}/_{7}$.)

Der leere Gewölberaum ist die Hälfte einer 7 m. langen Walze von $5\frac{1}{4}$ m. Durchmesser und hat daher einen Inhalt von $\frac{1}{2} \times 5\frac{1}{4} \times 5\frac{1}{4} \times \frac{11}{14} \times 7 = \frac{21 \times 21 \times 11 \times 7}{4 \times 4 \times 14 \times 2}$ $= \frac{21 \times 21 \times 11}{4 \times 4 \times 2 \times 2} = {}^{4851}/_{32}$ ⊞m., welche $\frac{4851 \times 10}{32} =$ $1515\frac{15}{16}$ Hektoliter ergeben.

Der senkrechte Durchschnitt der 7 m. langen Steinlage ist die Hälfte eines Kreisringes. Da die Durchmesser dieses Kreisringes bezüglich $5\frac{1}{4}$ m. und $5\frac{1}{4} + 2 = 7\frac{1}{4}$ m., also die entsprechenden Radien $2\frac{5}{8}$ m. und $3\frac{5}{8}$ m. betragen, so ist die erwähnte Schnittfläche $= \frac{1}{2} \cdot [(3\frac{5}{8})^2 - (2\frac{5}{8})^2] \cdot {}^{22}/_{7}$ $= \left(\frac{841 - 441}{64}\right) \cdot {}^{11}/_{7} = {}^{25}/_{4} \cdot {}^{11}/_{7} = {}^{675}/_{28}$ □m. und daher der Kubikinhalt der 7 m. langen Steinlage $\frac{275 \times 7}{28} =$ ${}^{275}/_{4} = 68\frac{3}{4}$ ⊞m.

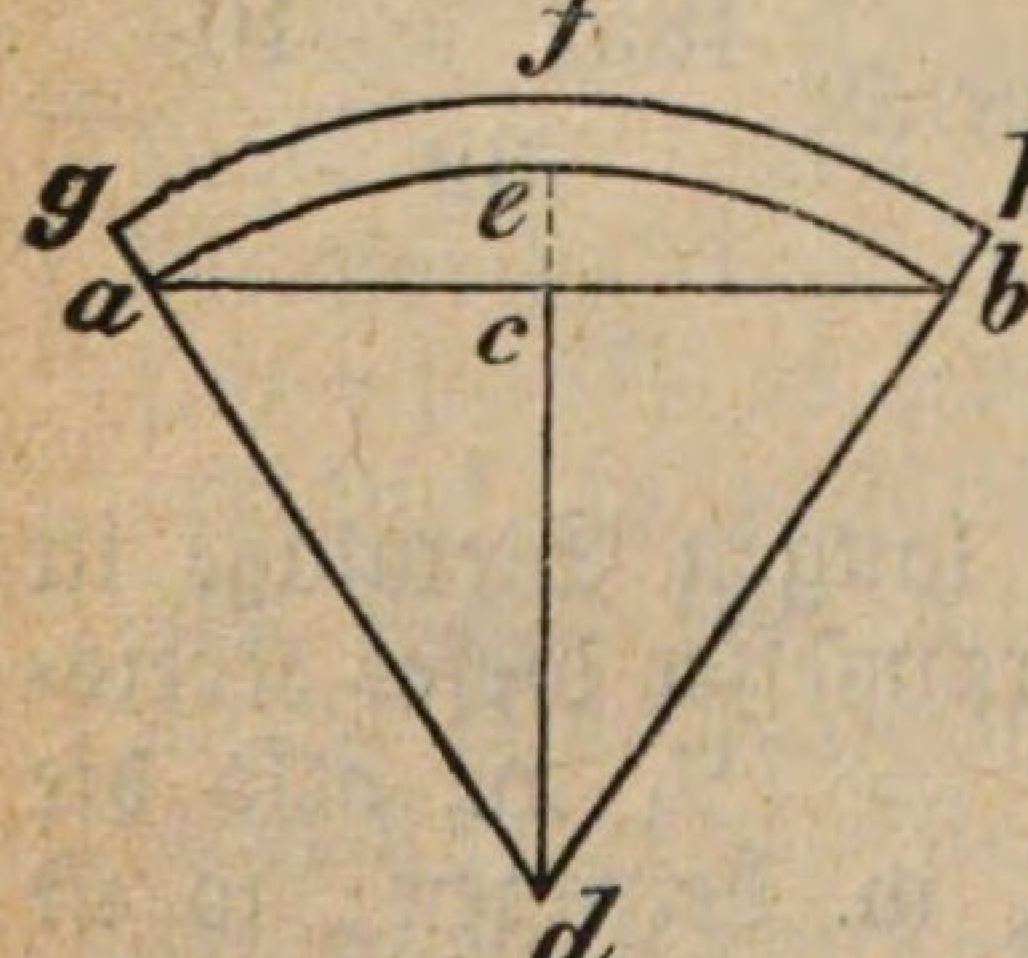
Uebungsaufgaben. In einem halbkreisförmigen Tonnengewölbe ist

	Gegeben:		Gesucht:
Länge.	Weite im Lichten.	Dicke der Steinlag.	Kubikinhalt der Steinlage.
528. $10^1/_2$ m.	5 m.	$1^1/_2$ m,	$160^7/_8$ ⊞ m.
529. 14 „	6 „	2 „	352 „
530. 21 „	8 „	2 „	660 „
531. $17^1/_2$ „	7 „	$1^1/_2$ „	$350^5/_8$ „

Inhalt des leeren Raumes.
4125 Hl.
1980 „
5280 „
3368 „

Beispiel. 2. Die lichte Weite eines nach einem Kreisbogen construirten Gewölbes von $10^1/_2$ m. Länge beträgt 8 m., die Höhe des Gewölbes 2 m. und die Dicke der Steinlage 1 m., während der zum Kreisbogen gehörige Centriwinkel $106^1/_4$ Grad hat. Man soll den Inhalt des Gewölberaumes und den Kubikinhalt der Steinlage berechnen. ($\pi = {}^{22}/_7$.)

Fig. 12.



Es sei in Fig. 12 die Weite im Lichten ab = 8 m., die Höhe ce = 2 m. und der Centriwinkel adb = $106^1/_4$ Grad, so ist, wenn der unbekannte Radius da oder de mit r bezeichnet wird, in dem rechtwinkligen Dreieck acd die Kathete cd = ed — ec = r — 2 und die Kathete ac = $^8/_2$ = 4 m., folglich:

$$da^2 - dc^2 = ac^2$$

d. i. $r^2 - (r - 2)^2 = 4^2$

oder $r^2 - (r^2 - 4r + 4) = 16$

woraus folgt $4r - 4 = 16$

und $4r = 16 + 4 = 20$

mithin $r = 5$ m.,

d. h. der innere Radius da, de oder db beträgt 5 m., so daß der äußere Radius dg, df oder dh $= 5 + 1 = 6$ m. sein muß.

Um nun den Inhalt des Gewölberaumes zu berechnen, hat man zunächst den Inhalt des Kreisabschnitts abe zu bestimmen. Derselbe ergiebt sich, wenn man das Dreieck bad von dem Kreissector daeb subtrahirt, also:

$$\text{Kreissector daeb} = 5^2 \cdot {}^{22}/_{7} \cdot \frac{106\,{}^1/_4}{360} = 23\ {}^{191}/_{1008}\ \square\text{m.}$$

$$\text{Dreieck bad} = \frac{8 \cdot (5 - 2)}{2} = 12\ \square\text{m.}$$

$$\text{Kreisabschnitt abe} = 11\ {}^{191}/_{1008}\ \square\text{m.}$$

Wird dieser Inhalt mit der Länge des Gewölbes multiplicirt, so ergiebt sich der Inhalt des leeren Gewölberaums $= 11\ {}^{191}/_{1008} \times 10\,{}^1/_2 = {}^{11279}/_{1008} \times {}^{21}/_{2} = \frac{11279}{48 \times 2} = 117\,{}^{47}/_{96}$ Kubikm., welche $117\,{}^{47}/_{96} \times 10 = 1174\,{}^{43}/_{48}$ Hektoliter ergeben. Dieses Facit ist etwas zu groß, was alle Mal eintritt, wenn $\pi = {}^{22}/_{7}$ gesetzt wird.

Um die Steinmasse des Gewölbes zu berechnen, hat man ihren senkrechten Durchschnitt aebhfg mit der Länge der Steinlage zu multipliciren.

Das Flächenstück aebhfg ist als Theil eines Kreisringes gleich einem Trapez, das bei 1 m. Höhe die Länge der Bogen aeb und gfh zu Parallelen hat. Zur Berechnung dieser Bogenlängen sind der Centriwinkel gdh und die Radien da und dg zu benutzen. Da da $= 5$ m. und dg $= 6$ m. ist, so beträgt die Hälfte des Bogens gfh, d. i. Bogen gf $6\,\pi \cdot \frac{106\,{}^1/_4}{360}$ Meter, ferner die Hälfte des Bogens aeb, d. i. Bogen ae $5\,\pi \cdot \frac{160\,{}^1/_4}{360}$ Meter, daher das dem Flächeninhalt aebhfg inhaltsgleiche Trapez

$$1 \cdot (6 + 5)\,\pi \cdot \frac{106\,{}^1/_4}{360} = \frac{11\,\pi \cdot 425}{360 \cdot 4},$$

oder wenn $\pi = {}^{22}/_{7}$ gesetzt wird:

$$\frac{11 \,.\, 22 \,.\, 85}{72 \,.\, 7 \,.\, 4} = \frac{11 \times 11 \times 85}{36 \times 7 \times 4} \;\square\text{m.}$$

Demgemäß enthält die $10\frac{1}{2} = {}^{21}/_{2}$ m. lange Steinlage $\frac{21 \times 11 \times 11 \times 85}{2 \times 36 \times 7 \times 4} = \frac{11 \times 11 \times 85}{2 \times 12 \times 4} = 107\,{}^{13}/_{96}$ oder nahe 107 ⊞m.

Anmerk. 1. Die Bestimmung des Centriwinkels in vorliegendem Falle ist streng genommen überflüssig, indem die Anzahl der Grade aus den gegebenen Linien (trigonometrisch) berechnet werden kann.

Anmerk. 2. In allen Fällen wird der innere Radius (da) gefunden, wenn man sowohl (ac) die Hälfte der lichten Weite als auch (ce) die Höhe des Gewölberaumes ins Quadrat erhebt, die beiden Quadratzahlen summirt und die erhaltene Summe durch (2 . ce) die doppelte Höhe des Gewölbes dividirt. Demgemäß ist nach obigen Angaben der innere Radius da $= \frac{4^2 + 2^2}{2 \times 2} = \frac{16 + 4}{4} = {}^{20}/_{4} = 5$ m.

Uebungsaufgaben. In einem nach einem Kreisbogen construirten Gewölbe ist

Gegeben:

	Länge.	Höhe.	Weite im Lichten.	Dicke der Seitenlage.	Centriwinkel.
$\pi = {}^{22}/_{7}$	532. 8 m.	2 m.	6 m.	1 m.	$134\frac{3}{4}$ Grd.
	533. 7 „	2 „	5 „	1 „	$116\frac{1}{4}$ „
	534. 9 „	3 „	8 „	$1\frac{1}{2}$ „	$147\frac{1}{2}$ „
	535. 10 „	$2\frac{1}{2}$ „	7 „	1 „	$122\frac{1}{6}$ „

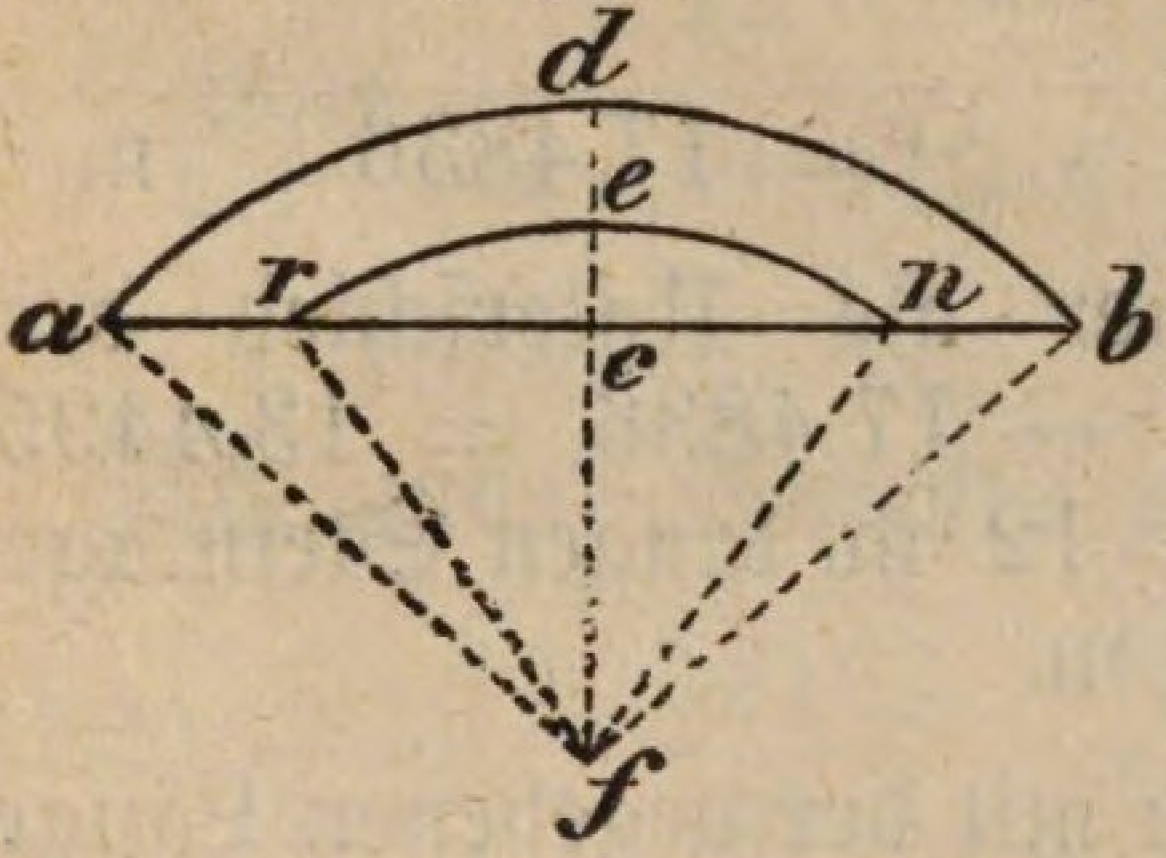
Gesucht:

Kubinhalt der Steinlage.	Inhalt des leeren Raums.
$70\frac{7}{12}$ ⊞m.	$694\frac{7}{144}$ Hl.
$76\frac{13}{112}$ „	$273\frac{5833}{6144}$ „
$170\frac{211}{224}$ „	$1592\frac{29}{1008}$ „
$104\frac{23}{90}$ „	$1279\frac{887}{7560}$ „

Beispiel 3. Ein Tonnengewölbe (Fig. 13) von 12 m. Länge und 1 m. Wandstärke hat im Lichten eine Weite (rcn) von 10 m. und eine Höhe (ce) von $2\frac{1}{7}$ m. Der zu dem inneren Kreisbogen gehörige Centriwinkel rfn beträgt $106\frac{1}{4}$ Grad, der zu dem äußern Kreisbogen gehörige Centriwinkel

afb beträgt 118 Grad. Es soll der Kubikinhalt der Steinlage und die Größe des innern Gewölberaumes berechnet werden. ($\pi = {}^{22}/_{7}$.)

Fig. 13.



Zunächst sind die Radien fr = fe und fa = fd zu bestimmen.

Es ist aber in dem mit dem Radius fr beschriebenen Kreise der eine Abschnitt des Durchmessers = ce = $2^1/_2$ m. und die Hälfte der denselben schneidenden Sehne = cr = 5 m. gegeben, daher der andere Abschnitt des Durchmessers =

$$\frac{5^2}{2^1/_2} = \frac{25 \times 2}{5} = 10 \text{ m.},$$

der erwähnte Durchmesser = $2^1/_2 + 10 = 12^1/_2$ m., mithin der Radius fr oder fe $= \frac{12^1/_2}{2} = \mathbf{6^1/_4}$ m.

Da ferner fd = fe + ed = $6^1/_4 + 1 = 7^1/_4$ ist, so folgt hieraus, daß der zu dem äußeren Bogen gehörige Radius fd = fa = fb **$7^1/_4$** m. beträgt.

Die gemeinschaftliche Höhe cf der beiden rechtwinkligen Dreiecke fca und fcr ist = fe — ce = $6^1/_4 - 2^1/_2 = 3^3/_4$ m., woraus folgt

$$\text{ca} = \sqrt{(\text{fa})^2 - (\text{fc})^2}$$

d. i. $\text{ca} = \sqrt{(7^1/_4)^2 - (3^3/_4)^2} = \sqrt{(7^1/_4 + 3^3/_4)(7^1/_4 - 3^3/_4)}$

oder $\text{ca} = \sqrt{11 \,.\, 3^1/_2} = \sqrt{{}^{77}/_2} = {}^1/_2\sqrt{154}$ m.

Die Berechnung des Flächenstücks adbncr geschieht nun folgendermaßen.

$$\text{Sector fadb} = (7^1/_4)^2 \,.\, {}^{22}/_7 \,.\, {}^{118}/_{360} = \frac{29 \times 29 \times 22 \times 118}{4 \times 4 \times 7 \times 360}$$

$= 54^{1489}/_{10080}$ □m.

$$\text{Dreieck fab} = \frac{3^3/_4 \,.\, \sqrt{154}}{2} = \frac{15\sqrt{154}}{8} = 23{,}2146 \text{ □m.}$$

Segment abd = $54^{1489}/_{10080}$ — 23,2146 = 54,1477 — 23,2146 = **30,9331** □m.

$$\text{Sector fren} = (6\tfrac{1}{4})^2 \cdot \tfrac{22}{7} \cdot \frac{106\tfrac{1}{4}}{360} = 36{,}2336 \ \square\text{m.}$$

$$\text{Dreieck frn} = \frac{10 \cdot 3\tfrac{3}{4}}{2} = 5 \cdot 3\tfrac{3}{4} = 18{,}75 \quad \text{"}$$

$$\text{Segment rcne} \qquad = 17{,}4836 \ \square\text{m.}$$

Demgemäß ist Flächenstück adbner als Unterschied der Segmente abd und ren = 30,9331 — 17,4836 = 13,4495 □m. und daher der Kubikinhalt der 12 m. langen Steinlage = 12 × 13,4495 = **161,394** ⊞m.

Wird schließlich das Segment rcne mit der gegebenen Länge multiplicirt, so findet sich der Inhalt des inneren Gewölberaumes = 12 × 17,4836 = 209,8032 ⊞m., zu deren Ausfüllung **2098,032 Hektoliter** erforderlich sind.

Anmerk. Man setze in Fig. 13

Aufg. 536:		Aufg. 537:	
die Länge	= 15 m.	die Länge	= 16 m.
rn	= 10 "	rn	= 12 "
ce	= $2\frac{1}{2}$ "	ce	= 3 "
cd	= $1\frac{1}{2}$ "	ed	= 2 "
Winkel afb	= $122\frac{1}{6}$ Grad.	Winkel afb	= $123\frac{1}{2}$ Grad.
Winkel rfn	= $106\frac{1}{4}$ "	Winkel rfn	= $105\frac{1}{4}$ "

und berechne hiernach den Kubikinhalt der Steinlage und den Inhalt des inneren Gewölberaumes.

3. Kuppelgewölbe, deren Durchschnitt ein Halbkreis ist, haben die Form einer hohlen Halbkugel, und werden daher nach § 33 Nr. 6 berechnet.

Beispiel. Ein Kugelgewölbe von $1\frac{1}{2}$ m. Wandstärke hat im Lichten einen Durchmesser von $11\frac{1}{2}$ m. Wie viel Hektoliter kann dies Gewölbe aufnehmen? Wie viel beträgt der Kubikinhalt der Gewölbedecke? Wie groß ist die innere Kugelfläche und wie viel kostet ihr Anstrich, wenn 1,5 Mark pro Quadratmeter gezahlt werden? Wie groß ist die äußere Kugelfläche und wie viel kostet, die Deckung der Kuppel, wenn hierzu Kupferplatten à $\frac{1}{2}$ □m., jede zu $7\frac{1}{2}$ Mark verwendet werden? ($\pi = 3{,}1415927$).

Der Durchmesser der ausgefüllt gedachten Kugel beträgt $11\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4} = 14$ m., derjenige der inneren $11\frac{1}{2}$ m.

Mithin ist der Kubikinhalt der Gewölbedecke $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot (14^3 - 11{,}5^3) = \frac{\pi}{12} \cdot (2744 - 1520\frac{7}{8}) = \frac{\pi}{12} \cdot 1223\frac{1}{8} = \frac{\pi \cdot 9785}{96} = 320{,}213$ ⊞m.

Das innere Gewölbe enthält $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 11{,}5^3 = \frac{\pi}{12} \cdot 1520\frac{7}{8} = \frac{\pi \cdot 12167}{96} = 398{,}164$ ⊞m. und kann daher 3981,64 Hl. aufnehmen.

Die innere Kugelfläche des Gewölbes beträgt $\frac{1}{2} \cdot 11{,}5^2 \cdot \pi = \frac{1}{2} \cdot 132\frac{1}{4} \cdot \pi = \frac{529 \cdot \pi}{8} = 207{,}7378$ □m., deren Anstrich $207{,}7378 \cdot 1{,}5 = 311{,}6067$ Mark kostet.

Die äußere Kugelfläche des Gewölbes beträgt $\frac{1}{2} \cdot 14^2 \cdot \pi = 98 \cdot \pi = 307{,}876$ □m., zu deren Deckung 615,752 Kupferplatten erforderlich sind, welche $615{,}752 \cdot 7\frac{1}{2} = 4618{,}14$ Mark kosten.

Uebungsaufgaben. In einem Kugelgewölbe ist

Gegeben: Wandstärke.	Durchmesser i. Lichten.	Gesucht: Kubikinhalt der Decke.	Inhalt der leeren Raumes.
538. 1 m.	7 m.	$193 \cdot \frac{\pi}{6}$ ⊞m.	$1715 \cdot \frac{\pi}{6}$ Hl.
539. 1 „	8 „	$122 \cdot \frac{\pi}{3}$ „	$1280 \cdot \frac{\pi}{3}$ „
540. 2 „	10 „	$436 \cdot \frac{\pi}{3}$ „	$2500 \cdot \frac{\pi}{3}$ „

Anmerk. Um die Oberfläche eines gothischen Kreuzgewölbes annähernd zu bestimmen, hat man den Inhalt des Grundrisses zu verdoppeln, während der Flächeninhalt eines gewöhnlichen Kreuzgewölbes (ebenfalls annähernd) gefunden wird, wenn man den Inhalt des Grundrisses mit $\frac{8}{7}$ multiplicirt.

§. 24.

Die regulären Polyëder.

oder die eckigen Körper von ganz regelmäßiger Form.

1. Es giebt 5 regelmäßige Polyëder:

das Tetraëder oder Vierflach, von 4 regulären Dreiecken begrenzt;

das Octaëder oder Achtflach, von 8 regulären Dreiecken begrenzt;

das Icosaëder oder Zwanzigflach, von 20 regulären Dreiecken begrenzt;

das Hexaëder oder Sechsflach (Kubus, Würfel) von 6 gleichen Quadraten begrenzt;

das Dodecaëder oder Fünfecks-Zwölfflach, von 12 regulären Fünfecken begrenzt.

Die Seitenflächen jedes regelmäßigen Polyëders sind in Form und Größe unter sich vollkommen gleich und liegen gleich weit vom Mittelpunkte des Körpers ab. Dasselbe gilt auch von allen Kantenlinien, so wie von den Ecken des Polyëders. Demgemäß kann sowohl in als um letzteres eine Kugel beschrieben gedacht werden. Die in das Polyëder beschriebene Kugel berührt jede der Seitenflächen desselben in einem Punkte (dem Mittelpunkte der Fläche), während die Oberfläche der umbeschriebenen Kugel durch alle Ecken des Polyëders hindurchgeht. Mittels der Halbmesser der einbeschriebenen und umbeschriebenen Kugel kann, sobald noch die Länge einer Seitenkante bekannt ist, der Kubikinhalt des Polyëders gefunden werden. Weniger Schwierigkeit gewährt die Berechnung der Oberfläche, indem letztere sich ergiebt, wenn man den Inhalt einer (regulären) Seitenfläche mit der Zahl aller Seitenflächen des regelmäßigen Körpers multiplicirt.

2. Zur bequemeren Berechnung der Polyëder dient folgende Tabelle, in welcher die Länge einer Kantenlinie des Körpers mit a bezeichnet ist.

	Oberfläche.	Kubikinhalt.	Radius der einbeschriebenen Kugel.	Radius der umbeschriebenen Kugel.
Tetraëder	$a^2 . 1,73205$	$a^3 . 0,11785$	$a . 0,20412$	$a . 0,61237$
Octaëder	$a^2 . 3,46410$	$a^3 . 0,47140$	$a . 0,40825$	$a . 0,70711$
Icosaëder	$a^2 . 8,66025$	$a^3 . 2,18169$	$a . 0,75576$	$a . 0,95106$
Hexaëder	$a^2 . 6,00000$	$a^3 . 1,00000$	$a . 0,50000$	$a . 0,86603$
Dodecaëder	$a^2 . 20,64551$	$a^3 . 7,66312$	$a . 0,11352$	$a . 1,40126$

Anmerk. In vorstehenden Brüchen ist mit Berücksichtigung der weggelassenen Stellen bei der fünften Decimalstelle meistens eine Correction eingetreten.

Beispiel. Es soll die Oberfläche und der Kubikinhalt der fünf regulären Körper berechnet werden, wenn in jedem derselben die Länge einer Kante 10 cm. beträgt.

Tetraëder.

Oberfläche $= 10^2 . 1,73205 = 173,205$ □ cm.
Kubikinhalt $= 10^3 . 0,11785 = 117,85$ ⧉ cm.

Octaëder.

Oberfläche $= 10^2 . 3,46410 = 346,410$ □ cm.
Kubikinhalt $= 10^3 . 0,47140 = 471,40$ ⧉ cm.

Icosaëder.

Oberfläche $= 10^2 . 8,66025 = 866,025$ □ cm
Kubikinhalt $= 10^3 . 2,18169 = 2181,69$ ⧉ cm.

Hexaëder.

Oberfläche $= 10^2 . 6,00000 = 600$ □ cm.
Kubikinhalt $= 10^3 . 1,00000 = 1000$ ⧉ cm.

Dodecaëder.

Oberfläche $= 10^2 . 20,64551 = 2064,551$ □ cm.
Kubikinhalt $= 10^3 . 7,66312 = 7663,12$ ⧉ cm.

Uebungsaufgaben. In jedem der fünf regulären Körper ist die Kantenlänge = 20 cm. gegeben:

		Gesucht: Oberfläche.	Kubikinhalt.
541.	Tetraëder	692,82 □m.	942,8 ⧉cm.
542.	Octaëder	1285,64 "	3771,2 "
543.	Icosaëder	3464,10 "	17453,52 "
544.	Hexaëder	2400 "	8000 "
545.	Dodecaëder	8258,204 "	61304,96 "

§ 37.

Ganz unregelmäßige Körper.

Die Größe eines unregelmäßigen Körpers von nicht beträchtlicher Ausdehnung wird am bequemsten dadurch gefunden, daß man denselben in ein Gefäß von bekanntem Kubikinhalte legt, die leeren Zwischenräume mit Sand oder Wasser ausfüllt und die räumliche Größe dieser Hülfsmasse von dem Inhalte des Gefäßes abzieht.

Erstes Beispiel. In einem parallelepipedischen) Kasten von 1 m. Länge, $\frac{1}{2}$ m. Breite und $\frac{3}{4}$ m. Höhe im Lichten befindet sich ein Holzblock, dessen Herausnahme aus dem mit Sand gefüllten Kasten zur Folge hat, daß die Sandschicht, nachdem sie wieder geebnet worden, nur 40 cm. hoch ist. Wie viel beträgt der Kubikinhalt dieses Holzblocks?

Inhalt des gefüllten Kastens $= 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$ ⧉m.
Die $\frac{2}{5}$ m. hohe Sandschicht beträgt $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ "

Kubikinhalt des Holzblocks $= \frac{3}{8} - \frac{1}{5} = \frac{7}{40}$ ⧉m.

Oder:

Der erwähnte Holzblock ist gleich einem Parallelepipedon von 1 m. Länge, $\frac{1}{2}$ m. Breite und $\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$ m. Höhe und enthält daher $1 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{20} = \frac{7}{40}$ ⧉m.

Zweites Beispiel. Ein Mensch, welcher in einem kreisrunden Bassin von $5\frac{1}{4}$ m. Durchmesser gänzlich untertauchte, bewirkte hierdurch, daß der Wasserspiegel um $\frac{3}{4}$ cm. stieg. Wie viel beträgt der Raum, den der Leib dieses Menschen einnimmt? ($\pi = \frac{22}{7}$.)

Der zu berechnende Raum ist ein $^3/_4$ cm. oder $^3/_{400}$ m. hoher Cylinder von $5^1/_4$ m. Durchmesser und beträgt daher

$$5^1/_4 \times 5^1/_4 \times {}^{11}/_{14} \times {}^3/_{400} = \frac{21 \times 21 \times 11 \times 3}{4 \times 4 \times 14 \times 400}$$

$$= \frac{21 \times 3 \times 11 \times 3}{4 \times 4 \times 2 \times 400} = {}^{2079}/_{12800} \text{ □m.} = 16^{25}/_{128}$$

□dm., d. i. nahe $16^1/_5$ □dm.

2. Noch bequemer ist es, die Größe eines unregelmäßigen Körpers mittels seines specifischen Gewichtes zu berechnen. Das specifische Gewicht eines Körpers wird durch eine unbenannte Zahl ausgedrückt. Dieselbe giebt an, wie viele Mal der betreffende Körper schwerer ist als ein gleiches Volumen destillirtes Wasser bei einer Wärme von 4 Grad des hundertheiligen Thermometers.

Destillirtes Wasser
bei + 4 Grad Celsius.

1 □m.	wiegt	1 T oder 1000 Kg.
1 □dm.	„	1 Kg
1 □cm.	„	1 g
1 □mm.	„	1 mg

Das specifische Gewicht des Eisens beträgt 7,8. Damit ist gesagt, daß 1 □cm. (resp. □m. ꝛc.) Eisen 7,8 mal so schwer ist als 1 □cm. (resp. □m. ꝛc.) destillirtes Wasser bei + 4 Grad Celsius.

Das specifische Gewicht des Tannenholzes beträgt 0,55; d. h. 1 □m. Tannenholz ist 0,55 mal so schwer als 1 □m. destillirtes Wasser ꝛc.

Für die Berechnung unregelmäßiger Körper sind nun, unter der Voraussetzung, daß s das specifische Gewicht bezeichnet, nachstehende Regeln zu merken.

A. Das absolute und das specifische Gewicht eines Körpers sind zur Bestimmung seines Kubikinhalts gegeben.

a. Der Kubikinhalt wird in Kubikdecimetern gefunden, wenn man das Kilogramm-Gewicht des Körpers durch das specifische Gewicht desselben dividirt; also

$$\boxplus\,\text{dm.} = \frac{Kg}{s}.$$

b. Der Kubikinhalt wird in Kubikmetern gefunden, wenn man das Tonnen-Gewicht des Körpers durch das specifische Gewicht desselben dividirt; also

$$\boxplus\,\text{m.} = \frac{T}{s}.$$

c. Der Kubikinhalt wird in Kubikcentimetern gefunden, wenn man das Gramm-Gewicht des Körpers durch das specifische Gewicht desselben dividirt; also

$$\boxplus\,\text{cm.} = \frac{g}{s}.$$

d. Der Kubikinhalt wird in Kubikmillimetern gefunden, wenn man das Milligrammgewicht des Körpers durch das spezifische Gewicht desselben dividirt; also

$$\boxplus\,\text{mm.} = \frac{mg}{s}.$$

B. Der Kubikinhalt und das specifische Gewicht eines Körpers sind zur Berechnung des absoluten Gewicht desselben gegeben.

Bei obiger Bezeichnung findet sich:

$T. = s\,.\,\boxplus\,\text{m.}$	$g. = s\,.\,\boxplus\,\text{cm.}$
$Kg. = s\,.\,\boxplus\,\text{cm.}$	$mg. = s\,.\,\boxplus\,\text{mm.}$

C. Aus dem Kubikinhalt und dem absoluten Gewicht eines Körpers läßt sich das specifische Gewicht desselben berechnen. Es ist nämlich bei der bekannten Bezeichnung

$s = \dfrac{Kg.}{\boxplus\,\text{dm.}}$	$s = \dfrac{g}{\boxplus\,\text{m.}}$
$s = \dfrac{T}{\boxplus\,\text{m.}}$	$s = \dfrac{mg.}{\boxplus\,\text{mm.}}$

Beispiel. 1. Ein Stück Buchenholz wiegt 1 Ctr. 70 ℔. Wie viel beträgt sein Kubikinhalt, wenn das specifische Gewicht des Buchenholzes = 0,85 ist?

1 Ctr. 70 ℔. = 170 ℔. = 85 Kg.

85 Kilogramm Wasser nehmen einen Raum von 85 □ dm. ein. Da das Buchenholz aber nicht so dicht ist als Wasser, nämlich nur 0,85 mal so dicht, so nehmen 85 Kg. Buchenholz einen größeren Raum ein, dessen Inhalt $= \frac{85}{0,85} = \frac{85 \times 100}{85}$ $= 100$ □ dm. $= {}^1/_{10}$ □ m. ist.

Beispiel. 2. Wie viel beträgt der Kubikinhalt eines 42 Pfund 30 Loth schweren Bernsteinstücks, wenn das specifische Gewicht des Bernsteins = 1,065 ist?

42 ℔. 30 Lth. = 21 Kg. 30 Lth. = 21,3 Kg.

21,3 Kg. Wasser nehmen einen Raum von 21,3 □ dm. ein. Da der Bernstein 1,065 mal so dicht ist als das Wasser, so nehmen 21,3 Kg. Bernstein einen Raum von $\frac{21,3}{1,065} =$ $\frac{21300}{1065} = 20$ □ dm. ein.

Beispiel 3. Wie viel wiegt ein 5 m. langer, 20 cm. breiter und 25 cm. dicker Balken von (altem) Eichenholz, wenn das specifische Gewicht des letzteren = 1,67 ist?

Der Balken ist 20 cm. $= {}^1/_5$ m. breit und 25 cm. $= {}^1/_4$ m. dick. Mithin enthält derselbe $5 \times {}^1/_5 \times {}^1/_4 = {}^1/_4$ □ m. oder 250 □ dm. Eichenholz.

250 □ dm. Wasser wiegen 250 Kg. Da das alte Eichenholz schwerer ist als Wasser, nämlich 1,67 mal so schwer, so wiegen 250 □ dm. altes Eichenholz $1,67 \times 250 = 417,5$ Kg. oder 8 Ctr. 35 ℔..

Beispiel 4. Ein Thonwürfel, dessen Kante 15 cm. lang ist, wiegt 12 ℔. $7^1/_2$ Lth.. Welches specifische Gewicht hat hiernach der Thon?

Der erwähnte Würfel enthält 15 × 15 × 15 = 3375 □cm. Thon, welche 12 ℔. 7½ Lth = 12,15 ℔. = 6,075 Kg. = 6075 g. wiegen. Es wiegt also 1 □cm. Thon $\frac{6065}{3375}$ = 1,8 g. Da 1 □cm. Wasser ein Gewicht von 1 g. hat, so ist das specifische Gewicht des Thons = 1,8.

Beispiel 5. Ein Hektoliter Kochsalz wiegt 3 Ctr. 83⅗ ℔. Wie viel beträgt das specifische Gewicht des Kochsalzes?

100 Liter = 100 □dm.
3 Ctr. 83⅗ ℔. = 383,6 ℔. = 191,8 Kg.

Da 100 Liter Kochsalz ein Gewicht von 191,8 Kg. haben, so wiegt 1 Liter oder 1 □dm. 1,918 Kg. während 1 □dm. Wasser nur 1 Kg. wiegt. Daher ist das specifische Gewicht des Kochsalzes = 1,918.

Uebungsaufgaben.

	Gegeben:		Gesucht:
Körper.	Absolut. Gewicht.	Specif. Gewicht.	Volumen.
546. Platin	1,0361 Kg.	20,722	50 □cm.
547. Gold	3,8516 „	19,258	200 „
548. Blei	5,6760 „	11,352	500 „
549. Silber	2,6960 „	10,784	250 „
550. Kupfer.	3,5580 „	8,895	400 „

Körper.	Volumen.	Sp. Gewicht.	Abs. Gewicht.
551. Messing	20 □cm.	8,395	167,9 g.
552. Stahl	100 □dm.	7,767	776,7 Kg.
553. Zinn	150 „	7,264	1089,6 „
554. Zink	250 „	6,862	1715,5 „
555. Schwerspath	80 □cm.	4,300	344,0 g.

Körper.	Volumen.	Abs. Gewicht.	Sp. Gew.
556. Kreide	11,5 □dm.	26,45 Kg.	2,300
557. Feuerstein.	15 □cm.	39 g.	2,600

	Gegeben:		Gesucht:
Körper.	Volumen.	Abs. Gewicht.	Sp. Gew.
558. Sandstein	60 □ dm.	150 Kg.	2,500
559. Salpeter	10 Liter	19 „	1,900
560. Eis	270 □ m.	229 T.	0,916

3. Es mag hier noch eines sehr einfachen Verfahrens gedacht werden, mittels dessen man, ohne Anwendung einer Wage, im Stande ist, das Gewicht von lebendem Vieh annähernd genau zu bestimmen. Bei diesem Verfahren kommt zunächst die Gürtelweite nebst der Länge und in Folge dessen die Leibesfläche des Thieres in Betracht, wozu alsdann kleine Zahlentabellen, welche auf Erfahrungssätzen beruhen, das entsprechende Gewicht in Pfunden, resp. Kilogrammen, ohne weitere Mühe sofort ergeben. Der Gürtelumfang, die Gürtelweite oder der Gürtel ist hier nichts weiter als die Brustweite des Thieres, welche hinter dem Schulterblatte desselben mit einem Meßbande in Meter und Centimeter abgenommen worden ist. Wird das Meßband oder die Meßschnur unter dem Schwanzknochen des Thieres angelegt und bis zum vorderen Theile des Schulterblattes genommen, so erhält man die gesuchte Länge. Durch Multiplication des Gürtelumfanges und der Länge findet sich die Leibesfläche. Nun kommen aber erfahrungsmäßig bei Schlachtvieh von

1,57 — 2,20 m. Gürtelumfang 116 Kg. } auf jedes Quadratmeter Leibesfläche,
2,20 — 2,82 m. „ 157 „

so daß, wenn noch die Länge des Thieres ermittelt ist, das Gewicht des Thieres leicht berechnet werden kann.

Wer bei der Berechnung statt des Meters Centimeter anwenden will, setze in obigen Angaben:

157 — 220 cm. Gürtelumfang 11,6 g. } auf jedes Quadratcentimet. Leibesfläche.
220 — 282 cm. „ 15,7 „

Beispiel 1. Wie viel beträgt das Gewicht eines Thieres von 1,65 m. (oder 165 cm.) Länge und 1,88 m. (oder 188 cm.) Gürtelumfang.

Erste Berechnung. Leibesfläche = 1,65 . 1,88 = 3,1020

□m. Daher beträgt das Gewicht 3,1020 × 116 = 359,832 Kg. oder 7 Ctr. 19 Pf. 33 1/5 Lth.

Zweite Berechnung. Leibesfläche = 165 × 188 = 31020 □cm. Das Gewicht beträgt 31020 . 11,6 g = 359832 g. = 359 Kg. 832 g. = 719 Pf. 332 g. = 7 Ctr. 19 Pf. 33 1/5 Loth.

Bei Kälbern und Schafen, die 0,94 — 1,57 m. (oder 94 — 157 cm.) Gürtelbreite haben, kommen 81 Kg. auf das Quadratmeter, oder 8,1 g. auf das Quadratcentimeter Leibesfläche.

Beispiel 2. Ein Kalb hat 1,5 m. (oder 115 cm.) Länge und 1,41 m. (oder 141 cm.) Gürtelumfang. Wie schwer ist dieses Kalb?

Erste Berechnung. Leibesfläche = 1,15 . 1,41 = 1,6215 □m. Das Gewicht beträgt 1,6215 . 81 = 131,3415 Kg. = 2 Ctr. 62 Pf. 34 Lth. 1 1/2 g.

Zweite Berechnung. Leibesfläche = 115 × 141 = 16215 □cm. Daher beträgt das Gewicht 16215 × 8,1 = 131341,5 g. = 131 Kg. 341,5 g. = 262 Pf. 34 Lth. 1 1/2 g.

Bei kleineren Thieren von 0,62 m. (oder 62 cm.) Gürtel- oder Brustweite und von ziemlich derselben Länge kommen nur 55 Kg. auf das Quadratmeter, oder 5 1/2 g. auf das Quadratcentimeter Leibesfläche.

Uebungsaufgaben.

	Gegeben:		Gesucht:
	Länge.	Gürtel.	Gewicht.
561.	1,6 m.	1,8 m.	334,08 Kg.
562.	1,8 „	2,5 „	706,50 „
563.	1,0 „	1,4 „	113,40 „
564.	1,2 „	1,5 „	145,80 „
565.	0,6 „	0,62 „	22,46 „

§ 38.

Berechnung von Kugelhaufen.

(Zahlenreihen höherer Ordnung.)

1. Kugelpyramiden sind entweder vierseitig oder dreiseitig. Im ersteren Falle ist die Grundfläche ein Quadrat, im letzteren hingegen ein gleichseitiges Dreieck.

a. In der vierseitigen Kugelpyramide ergiebt die Anzahl der in jeder Schicht befindlichen Kugeln eine Quadratzahl. Die Spitze einer solchen Pyramide besteht aus einer einzigen Kugel, welche auf einer Schicht von $2 \times 2 = 4$ Kugeln ruht. Die nächstfolgende Schicht enthält $3 \times 3 = 9$ Kugeln und wird wiederum von einer aus $4 \times 4 = 16$ Kugeln bestehenden Schicht getragen u. s. f. Man hat also, um die Menge der in einem derartigen Haufen befindlichen Kugeln zu berechnen, so viele auf einander folgende Quadratzahlen — von 1 an — zu summiren, als der ganze Haufen Schichten zählt. Zur schnelleren Berechnung der in einer vierseitigen Pyramide befindlichen Kugeln dient folgende Formel:

$$S = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3},$$

wo S die Summe aller Kugeln des Haufens und n die Anzahl der Schichten desselben bezeichnet.

Beispiel. Wie viel Kugeln enthält eine vierseitige Kugelpyramide von 12 Schichten?

Hier ist $n = 12$, mithin $n + 1 = 13$ und $2n + 1 = 25$; folglich enthält die erwähnte Pyramide $\frac{12\,.\,13\,.\,25}{1\,.\,2\,.\,3} = 2\,.\,13\,.\,25 = 650$ Kugeln.

Uebungsaufgaben. In einer vierseit. Kugelpyramide ist

	Gegeben: Zahl d. Schichten.	Gesucht: Zahl d. Kugeln.
566.	15	1240
567.	16	1496
568.	18	2109
569.	20	2870
570.	24	4900

b. In einer dreiseitigen Kugelpyramide, deren Grundfläche n Kugeln in jeder Seite enthält, ist die Anzahl aller Kugeln =

$$S = \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

Die nte Schicht eines solchen Haufens enthält

$\frac{n\,(n+1)}{1\,.\,2}$ Kugeln,

so daß hiernach die Anzahl der in jeder beliebigen Schicht befindlichen Kugeln sogleich gefunden werden kann.

Beispiel. Wie viel Kugeln sind in einer dreiseitigen Kugelpyramide, wenn dieselbe 18 Schichten enthält, und wie viel Kugeln zählt a. die unterste, b. die 9. Schicht (von der Spitze aus gerechnet)?

Anzahl aller Kugeln $= \frac{18 \,.\, 19 \,.\, 20}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} = 3 \,.\, 19 \,.\, 20$ $= 1140$ Stück.

Die unterste Schicht enthält $\frac{18 \,.\, 19}{2} = 9 \,.\, 19 = 171$ Kugeln.

Die 9. Schicht enthält $\frac{9 \,.\, 10}{2} = 9 \,.\, 5 = 45$ Kugeln.

Uebungsaufgaben. In einer dreiseit. Kugelpyramide ist

	Gegeben: Zahl d. Schichten.	Gesucht: Zahl d. Kugeln.
571	12	364
572	16	816
573	20	1540
574	22	2024
575	24	2600

Anmerk. In jeder dreiseitigen Kugelpyramide enthält die Spitze 1 Kugel, die darunter liegende Schicht 3, die nächstfolgende 6 Kugeln, die vierte Schicht 10, die fünfte 15, die sechste 21, die siebente 28, die achte 36, die neunte 45, die zehnte 55, die elfte 66, die zwölfte 78 Kugeln u. s. f.

2. Abgekürzte Kugelpyramiden hat man in Gedanken zu vervollständigen und die Kugelzahl des oben fehlenden Theils von der Anzahl der in der vervollständigten Pyramide befindlichen Kugeln abzuziehen.

a. Die abgekürzte vierseitige Kugelpyramide.

Beispiel. Wie viel Kugeln zählt eine abgekürzte vierseitige Kugelpyramide, wenn in jeder Seite der untersten Schicht 24, in jeder Seite der obersten Schicht hingegen 12 Kugeln sind?

Wäre die Pyramide vollständig, so würde sie so viele Kugeln enthalten, als die Summe der ersten 24 Quadratzahlen beträgt, nämlich

$$\frac{24 \,.\, 25 \,.\, 49}{2 \,.\, 3} = 4 \,.\, 25 \,.\, 49 = 4900 \text{ Kugeln.}$$

Die Ergänzungspyrämide enthält in jeder Seite ihrer Grundfläche 11 Kugeln und besteht daher aus 11 Schichten, so daß die Anzahl ihrer Kugeln gleich der Summe der ersten 11 Quadratzahlen ist, nämlich =

$$\frac{11 \,.\, 12 \,.\, 23}{2 \,.\, 3} = 11 \,.\, 2 \,.\, 23 = 506 \text{ Kugeln.}$$

Mithin befinden sich in dem oben erwähnten Kugelhaufen 4900 — 506 = 4394 Kugeln.

Anmerk. In nachstehenden Uebungsaufgaben bezeichnet
n die Zahl der Kugeln in jeder Seite der untersten Schicht,
m die Zahl der Kugeln in jeder Seite der obersten Schicht.

Uebungsaufgaben. In einer abgekürzten vierseitigen Kugelpyramide ist

	Gegeben:		Gesucht:
	n	m	Summe der Kugeln.
576.	24	8	4760
577.	25	10	5240
578.	25	12	4734
579.	26	19	4092
580.	26	10	5916

b. Die abgekürzte dreiseitige Kugelpyramide.

Beispiel. Eine abgekürzte dreiseitige Kugelpyramide enthält in jeder Seite der untersten Schicht 15 (allgemein n) Kugeln, in jeder Seite der obersten Schicht hingegen nur 8 (allgemein m) Stück. Wie viel Kugeln sind im Ganzen vorhanden?

Die vollständige Pyramide würde 15 Schichten, und demnach

$$\frac{15 \,.\, 16 \,.\, 17}{2 \,.\, 3} = 5 \,.\, 8 \,.\, 17 = 680 \text{ Kugeln}$$

enthalten, während die Ergänzungspyramide, die in jeder Seite ihrer Grundfläche 8 — 1 = 7 Kugeln zählt, aus 7 Schichten besteht, in denen sich

$$\frac{7 \,.\, 8 \,.\, 9}{2 \,.\, 3} = 7 \,.\, 4 \,.\, 3 = 84 \text{ Kugeln}$$

befinden, so daß die Summe der vorhandenen Kugeln = 680 — 84 = 596 ist.

Uebungsaufgaben. In einer abgekürzten dreiseitigen Kugelpyramide ist

	Gegeben: n	m	Gesucht: Summe der Kugeln.
581.	16	9	696
582.	16	7	480
583.	18	10	975
584.	18	9	1020
585.	20	10	1375

3. Sind viele Kugeln aufzuschichten, so bildet man Haufen, deren Grundfläche ein Rechteck ist. Die kleinere Seite dieses Rechtecks enthält n, die größere hingegen n + m — 1 Kugeln, während die oberste Schicht aus einer einzelnen Reihe von m Kugeln besteht. Die Summe aller in einem solchen Haufen befindlichen Kugeln ist =

$$S = \frac{n\,(n + 1)\,(2n + 3\,m - 2)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Wird die in der größern Seite der Grundfläche befindliche Kugelzahl (n + m — 1) mit p bezeichnet, so enthält die oberste (einzelne) Reihe m = p — n + 1 Kugeln, und die eben mitgetheilte Formel verwandelt sich in

$$S = \frac{n\,(n + 1)\,(3\,p - n + 1)}{1\,.\,2\,.\,3}.$$

Erstes Beispiel. Ein aus rechtwinkligen Schichten bestehender Kugelhaufen, welcher oben in eine einzelne Reihe von 16 Kugeln endigt, enthält in der kleineren Seite seiner Grundfläche 14 Kugeln. Wie viel Kugeln zählt dieser Haufen?

Hier ist n = 14 und m = 16, folglich die Summe aller Kugeln $= \frac{14\,.\,15\,.\,74}{2\,.\,3}$ oder 7 . 5 . 74 = 2590.

Der ganze Haufen enthält nämlich

1	Reihe von	16	Kugeln	=	16	Kugeln
2	Reihen à	17	"	=	34	"
3	" "	18	"	=	54	"
4	" "	19	"	=	76	"
5	" "	20	"	=	100	"
6	" "	21	"	=	126	"
7	" "	22	"	=	154	"
8	" "	23	"	=	184	"
9	" "	24	"	=	216	"
				Latus	960	

			Transport	960	Kugeln
10 Reihen	à 25	Kugeln	=	250	„
11 „	„ 26	„	=	286	„
12 „	„ 27	„	=	324	„
13 „	„ 28	„	=	364	„
14 „	„ 29	„	=	406	„
			Summa	2590	Kugeln.

Zweites Beispiel. Ein Kugelhaufen, welcher oben in eine einzelne Kugelreihe endigt, hat zur Grundfläche ein Rechteck, das in der größeren Seite 30, in der kleineren hingegen 10 Kugeln enthält. Wie viel Kugeln zählt dieser Haufen?

Hier ist $p = 30$ und $n = 10$, mithin die Summe sämmtlicher Kugeln $= \frac{10 \,.\, 11 \,.\, 81}{2 \,.\, 3}$ oder $5 \,.\, 11 \,.\, 27 = 1485$.

Von der untersten Schicht bis zur obersten Reihe aufwärts gerechnet, enthält der Haufen

10 Reihen	à 30	Kugeln	=	300	Kugeln
9 „	„ 29	„	=	261	„
8 „	„ 28	„	=	224	„
7 „	„ 27	„	=	189	„
6 „	„ 26	„	=	156	„
5 „	„ 25	„	=	125	„
4 „	„ 24	„	=	96	„
3 „	„ 23	„	=	69	„
2 „	„ 22	„	=	44	„
1 Reihe	„ 21	„	=	21	„
			im Ganzen	1485	Kugeln.

In der obersten Schicht sind $p - n + 1 = 30 - 10 + 1 = 21$ Kugeln.

Uebungsaufgaben. In einem Kugelhaufen, der ein Rechteck zur Grundfläche hat, ist

	Gegeben:			Gesucht:
	n	m	p	Sum. d. Kugeln.
586.	12	16		1820
587.	10	15		1155
588.	12	18		1976
589.	14	20		3010
590.	10	16		1210

	Gegeben:			Gesucht:
	n	m	p	Sum. d. Kugeln.
591.	12		27	1820
592.	10		24	1155
593.	12		29	1976
594.	14		33	3010
595.	10		25	1210

4. Wie die abgekürzten Kugelpyramiden, so müssen auch unvollständige rechtwinklige Kugelhaufen in Gedanken ergänzt werden. Zieht man die Ergänzung vom vervollständigten Haufen ab, so ergiebt sich die Anzahl aller vorhandenen Kugeln.

Beispiel. Ein Kugelhaufen, dessen Schichten Rechtecke sind, enthält in den Seiten der untersten Schicht 24 und 16, in denen der obersten Schicht hingegen 15 und 7 Kugeln. Wie viel Kugeln sind im Ganzen vorhanden?

Für den vollständigen Haufen ist n = 16 und p = 24.
" " oben fehlenden " " n' = 6 " p' = 14.
Demgemäß enthält

der volle Haufen $\frac{16 \cdot 17 \cdot 57}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2584$ Kugeln,

" fehlende " $\frac{6 \cdot 7 \cdot 37}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 259$ "

und sind mithin wirklich vorhanden 2325 Kugeln.

Uebungsaufgaben. In einem abgekürzten Kugelhaufen, dessen Grund- und Deckfläche Rechtecke sind, ist

	Gegeben:				Gesucht:
	n	p	n'	p'	Summe der Kugeln.
596.	16	24	8	16	2092
597.	15	20	9	14	1360
598.	14	18	8	12	1087
599.	13	20	7	14	1120
600.	12	18	6	12	901

5. Ein Kugelhaufen, welcher auf zwei Seiten an andere Kugelhaufen angelegt oder in sonstiger Weise unterstützt werden muß, enthält oben

1 Reihe von m Kugeln
darunter 2 Reihen à m — 1 Kugeln

ferner 3 Reihen à m — 2 Kugeln
„ 4 „ „ m — 3 „ u. s. f.
In jeder nten Schicht sind n (m — n + 1) Kugeln.

Die Anzahl aller in einem solchen Kugelhaufen befindlichen Kugeln ist =

$$S = \frac{n (n + 1) (3 m - 2n + 2)}{1 . 2 . 2},$$

wo n die Anzahl der Schichten und m die Zahl der in der obersten Reihe befindlichen Kugeln bezeichnet.

Beispiel. Ein auf zwei Seiten unterstützter Kugelhaufen, welcher aus 12 Schichten besteht, enthält oben eine Reihe von 20 Kugeln, darunter 2 Reihen à 19, alsdann 3 Reihen à 18 Kugeln u. s. f. Wie viel Kugeln zählt dieser Haufen im Ganzen?

Es ist n = 12 und m = 20; folglich enthält der ganze Haufen $\frac{12 . 13 . 38}{1 . 2 . 3} = 2 . 13 . 38 = 988$ Kugeln.

Uebungsaufgaben. In einem auf zwei Seiten unterstützten Kugelhaufen ist

	Gegeben: n	m	Gesucht: Summe der Kugeln.
601.	13	20	1092
602.	14	20	1190
603.	15	21	1400
604.	15	22	1520
605.	16	24	1904

6. Kann ein Haufen nur von der einen Seite angelegt werden, so pflegt man jeder folgenden Schicht zwar eine Reihe mehr zu geben, läßt aber die Anzahl der Kugeln in jeder Reihe unverändert. Hiernach enthalten die Schichten des Haufens von oben abwärts gerechnet, der Reihe nach: m, 2 m, 3 m, 4 m. . . . . . nm Kugeln, wo m die Anzahl der in der obersten Reihe befindlichen Kugeln, und n die Zahl der Schichten bezeichnet. Ein solcher Kugelhaufen ist ein Prisma von m Schichten, von denen jede $\frac{n (n + 1)}{1 . 2}$ Kugeln enthält. Mithin zählt der ganze Haufen

$$m . n \left(\frac{n + 1}{2}\right) \text{ Kugeln.}$$

Beispiel. Ein Kugelhaufen, der auf einer Seite angelegt ist, besteht aus 12 Schichten, von denen die oberste eine Reihe, die zweite 2, die dritte 3 Reihen hat u. s. f., jede Reihe 20 Kugeln zählend. Wie viel Kugeln enthält dieser Haufen?

Da hier n = 12 und m = 20 ist, so findet man als Summe der vorhandenen Kugeln

$$\frac{20 \,.\, 12 \,.\, 13}{2} = 10 \,.\, 12 \,.\, 13 = 1560.$$

Der Haufen ist ein Prisma von 20 Schichten à $\frac{12 \,.\, 13}{2}$ = 78 Kugeln und enthält daher 20 . 78 = 1560 Kugeln.

Uebungsbeispiele. In einem auf einer Seite angelehnten Kugelhaufen ist

	Gegeben: n	Gegeben: m	Gesucht: Summe d. Kugeln.
606.	12	21	1638
607.	13	22	2002
608.	14	23	2415
609.	15	24	2880
610.	16	24	3264

7. Um die Summe der n ersten Kubikzahlen schnell zu finden, bedient man sich der Formel

$$S = \left(\frac{n\,(n+1)}{2}\right)^2.$$

Hiernach ist die Summe der 10 ersten Kubikzahlen $\left(\frac{10 \,.\, 11}{2}\right)^2 = 55^2 = 3025$.

Die 24 ersten Kubikzahlen, d. i. 1 + 8 + 27 + 64 + ... , geben eine Summe von $\left(\frac{24 \,.\, 25}{2}\right)^2 = 300^2 = 90000$.

Inhalt.

Gotha. — Stollbergsche Buchdruckerei.

Adam, Wilhelm

Lehr- und Handbuch der Flächen- und Körperrechnung zum Schul- und Selbstunterricht Mit Rücksicht auf das Nothwendigste und Wichtigste bearbeitet von Wilhelm Adam. Mit mehr als 600 Uebungsaufgaben, nebst 13 Figuren im Text

Langensalza 1875